

Übersicht über die Technik der elektronischen Analogrechner

Von E. Kettel

Die in den USA, England und Rußland im Laufe der letzten zehn Jahre entwickelten elektronischen Analogrechner haben in Deutschland noch keineswegs die ihrer Bedeutung zukommende Beachtung gefunden, weil die durch den 2. Weltkrieg bedingte besondere Lage zunächst andere Aufgaben in den Vordergrund rückte. Der folgende Beitrag ist die Niederschrift eines Vortrages, der eine erste Einführung in die Technik der Analogrechner bezweckte.

Was bedeutet Analogie und Analogrechner

Eine Analogie liegt vor, wenn sich zwei verschiedene physikalische Systeme durch die gleichen mathematischen Beziehungen darstellen lassen. Die beiden Systeme sind dann untereinander oder auch dem entsprechenden mathematisch abstrakten Problem analog. Der Begriff Analogie enthält somit gleichzeitig etwas gegensätzliches und etwas sich Entsprechendes. Das Gegensätzliche sind die Qualitäten der zueinander analogen Größen, die eine Gruppe kann mechanische Größen, die andere z. B. thermische oder elektrische Größen umfassen. Das einander entsprechende ist das Gesetz, das die Größen einer Gruppe miteinander verbindet.

Ein Analogrechner liegt vor, wenn man zur Lösung eines mathematischen Problems ein analoges physikalisches System aufbaut und die Lösung des Problems durch ein physikalisches Experiment gewinnt, nämlich durch die Messung des Zustandes oder des zeitlichen Ablaufes der physikalischen Größen des aufgebauten Systems. Ein solcher Analogrechner ist z. B. der elektrolytische Trog. Das Verhalten der Stromlinien und Potentialflächen wird dabei durch die *Laplacesche* Diff. Gl. beschrieben. Ihre Ausmessung gibt deshalb eine Lösung dieser Differentialgleichung. Dieser Analogrechner eignet sich also zur Berechnung aller Systeme die durch die *Laplacesche* Diff. Gl. beschrieben sind, d. h. alle diese Systeme sind durch den elektrolytischen Trog analog dargestellt.

Im allgemeinen besteht der elektronische Analogrechner aus einer Ansammlung vieler Rechenelemente. Ein Rechenelement ist eine Einheit mit Eingangsklemmen und Ausgangsklemmen, wobei die Spannung an den Ausgangsklemmen eine bestimmte mathematische Beziehung zu den Eingangsspannungen hat; z. B. entspricht sie der Summe der Eingangsspannungen oder ihrem Produkt usw. Mit solchen Elementen läßt sich dann ein mathematisches Problem zusammenschalten. Die dazu grundsätzlich notwendigen Rechenelemente sind:

- | | | |
|---|----------------|---|
| a) Multiplikation mit konstantem Faktor | c) Summation | e) Multiplikation evtl. Division |
| b) Vorzeichenumkehrung | d) Integration | f) Funktionsbildung |
| | | g) Kurvenschreiber für die Rechenergebnisse |

Symbole dieser Recheneinheiten zeigt Bild 2.

Die analoge Größe beim elektronischen Analogrechner ist stets eine elektrische Spannung in einem Bereich $\pm E$, wobei E die Maschineneinheit ist und z. B. 100 V beträgt, und die Rechenelemente enthalten vorwiegend elektronische Mittel, gegebenenfalls aber auch elektromechanische Mittel. Dies ist der Unterschied gegenüber dem mechanischen Analogrechner bei dem z. B. ein Drehwinkel die analoge Größe darstellt; im Prinzip enthält dieser die gleichen Recheneinheiten, natürlich mechanisch realisiert. Die Vorteile des elektronischen Analogrechners sind ihm gegenüber die viel größere Rechengeschwindigkeit, der geringere Preis und die leichtere Verbindungsmöglichkeit der Recheneinheiten untereinander.

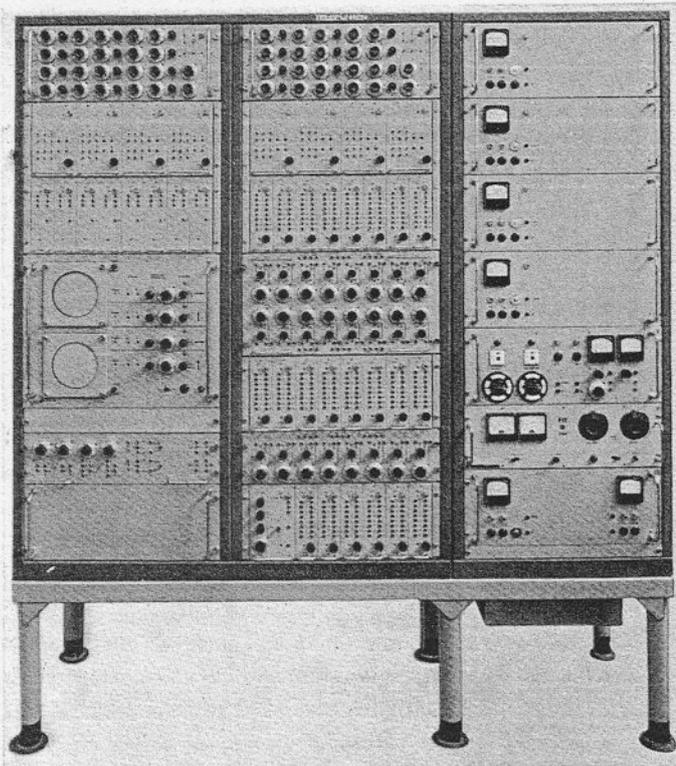


Bild 1: Repetierender, elektronischer Analogrechner von Telefunken mit 22 Summen- oder Integriereinheiten, 8 Umkehrverstärkern, 8 Multiplikatoren, 2 allgemeinen Funktionsgebern, 1 speziellen Funktionsgeber und 2 Oszillographenröhren zur Darstellung der Rechenergebnisse

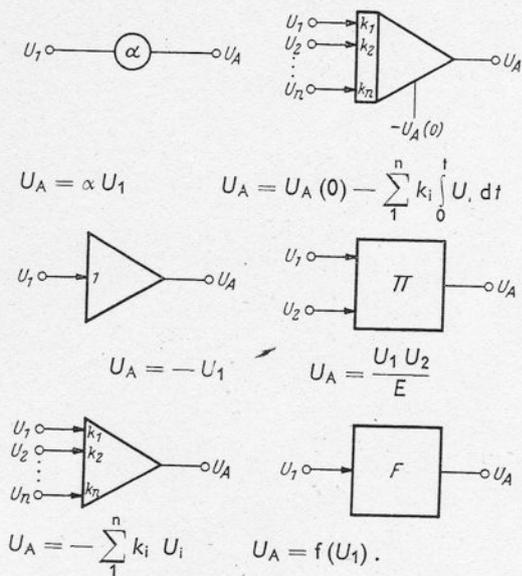


Bild 2: Symbole der im elektronischen Analogrechner verwendeten Rechenelemente

Was der elektronische Analogrechner leistet

Beim elektronischen Analogrechner erscheint die Lösung eines Problems als Ausgangsspannung einer Recheneinheit. Eine solche Spannung ist natürlich nur einer Variation fähig, der über der Zeit. Dies bedeutet, daß dieser Analogrechner stets nur Probleme lösen kann, bei denen eine unabhängige Variable auftritt, die stets durch die Zeit analog dargestellt wird. Ein Rechenergebnis kann auch durch die gleichzeitigen Ausgangsspannungen einer Gruppe von Recheneinheiten dargestellt sein. Jede dieser Ausgangsgrößen ist dann konstant oder mit der Zeit als der einzigen unabhängigen Variablen. Diese endlich vielen Ausgänge stellen dann eine Gruppe von abhängigen Variablen dar. Das allgemeinste vom elektronischen Analogrechner berechenbare Problem ist dann aber die Lösung von Gleichungssystemen von n abhängigen und höchstens einer einzigen unabhängigen Variablen. Innerhalb der einzelnen Gleichungen dürfen dabei alle die mathematischen Beziehungen zwischen den Variablen auf-

treten, die sich mit den verfügbaren Rechenelementen erledigen lassen, also Summen, Produkte, rationale oder transzendente Funktionen sowie Integrale und Ableitungen nach der unabhängigen Variablen. Probleme, die unter diese allgemeine Klasse fallen, sind: Auflösung von Gleichungssystemen. Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten oder nicht konstanten Koeffizienten, auch mit beliebigen Nichtlinearitäten, deren Anfangswert- und Randwertprobleme. Systeme gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen. Lösungen partieller Differentialgleichungen, soweit sich diese mittels der Differenzenrechnung auf ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichung bringen lassen und dafür die Zahl der Recheneinheiten ausreicht. Es soll nicht behauptet werden, daß der Analogrechner nun jede gewöhnliche Differentialgleichungen lösen kann. Bei manchen Problemen mit Singularitäten oder bei system-instabilen Gleichungen, wie manchen Eigenwertproblemen, liefert er keine oder nur ungenaue Lösungen.

Wechselstromrechner, Gleichstromrechner und Simulatoren

Grundsätzlich muß man zwischen zwei Typen elektrischer Analogrechner unterscheiden, dem Wechselstrom- und dem Gleichstromrechner. Die Rechenelemente des Wechselstromrechners sind motorgesteuerte Potentiometer, Kondensatoren oder Drehtransformatoren. Die Rechengröße wird durch die Amplitude einer Wechselspannung dargestellt. Dieser Rechner ist infolge der mechanischen Elemente relativ langsam, aber auch robust. Vorwiegend wird er für feste Probleme z. B. als Rechengeräte in Regel- oder Steuersystemen benützt. Der Gleichstromrechner stellt die Rechengrößen durch langsam veränderliche Gleichspannungen dar. Ursprünglich benutzte man auch hier für die Multiplikation und Funktionsbildung motorisch gesteuerte Potentiometer. Heute arbeitet er vorwiegend mit rein elektronischen Bauelementen, nur für spezielle Funktionen werden teilweise noch gesteuerte Potentiometer benützt. Dadurch ist der Gleichstromrechner viel anpassungsfähiger und sehr viel schneller. Die Lösungen werden entweder auf Papier aufgezeichnet oder aber man rechnet repetierend so schnell, daß die Lösungen auf Braunschen Röhren dargestellt werden können. Für die schnelle Durchmusterung eines Problems oder die Lösung von Randwertproblemen ist dies die weitaus bessere Methode. Ein Analogrechner befolgt in seinem physikalischen Verhalten über der Zeit die Gesetze des von ihm analog dargestellten Systems. Ist dieses auch ein physikalisches System mit der Zeit als unabhängiger Variablen, so kann man für die Berechnung die Zeitskala dehnen oder raffen. Einen Echtzeitrechner erhält man, wenn die Maschinenzeit gleich der Zeit des berechneten Problem es wird. In diesem Falle stellt der Analogrechner einen Simulator dar, der sich zwischen seinen Ein- und Ausgängen so verhält, wie das von ihm simulierte System. Man kann an den Ein- und Ausgängen Umsetzer anbringen, so daß dort die gleichen physikalischen Größen wie im simulierten System auftreten. So läßt sich z. B. eine Turbine, ein Flugzeug oder ein Atomreaktor simulieren. Die Bedeutung der Simulatoren liegt darin, daß man mit ihnen Experimente anstellen kann, wenn der Originalteil noch gar nicht existiert, die Versuche an ihm zu kompliziert, zu teuer oder zu gefährlich wären. Wo nicht der Zwang besteht, einen Vorgang zu simulieren, ist es im allgemeinen sehr vorteilhaft, die Rechenzeit nur mit Rücksicht auf die Rechenmaschine zu wählen, insbesondere die Rechenzeit zu verkürzen. Man kommt dann zu den repetierenden Rechnern, die den außerordentlichen Vorteil bieten, ohne Zeitverzug

die Wirkung von Parameteränderung auf die Lösung zu zeigen. Dazu genügt schon ein- bis zweimalige Wiederholung der Rechnung in der Sekunde, die dabei natürlich nur auf einer Braunschen Röhre dargestellt werden kann. Dieses Studium der Lösung bei Parameteränderungen und die Möglichkeit, Teile des berechneten Systems nebeneinander zu beobachten, ergibt einen so tiefen Einblick in das physikalische Verhalten des berechneten Systems, daß schon allein dadurch die Anwendung von Analogrechnern völlig gerechtfertigt ist. Ein langsamer Rechner oder ein Ziffernrechner bringen zwar Lösungen, gestatten aber nie diesen Einblick in so leichter Form. Aus diesem Grunde sollte auch der Ingenieur seine Probleme selbst auf der Analogmaschine berechnen, weil er dadurch zusätzlich zu den aufgeschriebenen Lösungen noch wertvolle Informationen über das Verhalten des Systems erhält. Diese Erkenntnisse liegen auch der Struktur der ersten von Telefunken gebauten Analogrechenmaschinen zu Grunde, die mit ihrer kürzesten Rechenzeit von 0,1 s alle Vorteile eines repetierenden Rechners bieten und mit ihrer längsten Rechenzeit von 100 s bequem auch die Aufzeichnung von Lösungen durch Tintenschreiber und dgl. gestatten.

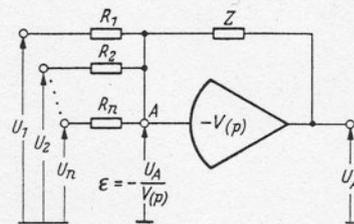
Die Technik der elektronischen Recheneinheiten

a) Summierung und Integration

Das wesentlichste Element des elektronischen Gleichstromrechners ist der Gleichstromverstärker, auch Operationsverstärker genannt, mit einer hohen Verstärkung, $V \rightarrow -\infty$ im Idealfall. In Bild 3 ist dargestellt, wie man dabei die Rechenoperationen der Summation und der Integration durchführen kann. Der über Z gekoppelte Verstärker hat dabei die Eigenschaft am Summenpunkt A die Spannung $\varepsilon \rightarrow 0$ zu halten. Dadurch werden die Ströme in allen Eingangswiderständen allein von der jeweiligen Eingangsspannung abhängig. Die Summe aller Eingangsströme ist dann umgekehrt gleich dem Strom U_A/Z . Wählt man für Z einen Ohmschen Widerstand R_0 , so ist die Ausgangsspannung mit umgekehrten Vorzeichen gleich der Summe der mit Gewichtsfaktoren R_0/R_i versehenen Eingangsspannungen. Man kann einen solchen Summenverstärker mit einer Anzahl Eingängen verschiedener Gewichtsfaktoren ausrüsten, z. B. mit 1, 4, 10. Ein solcher Rechenverstärker ist ein Vorzeichenumkehrer, wenn man einen Eingangspunkt mit dem Gewichtsfaktor 1 beschaltet, denn dann ist $U_A = -U_1$.

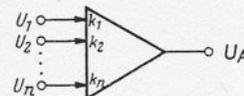
Aus dem Summiergerät wird ein Integrator, wenn man über eine Kapazität gegenkoppelt. Man erhält dann wie aus Bild 3 hervorgeht, das zeitliche Integral, über die Summe aller Eingänge, wobei jeder Summand als Faktor den reziproken Wert der Integrationszeitkonstanten $k_i = 1/CR_i$ hat. Nur bei $V \rightarrow \infty$ ist der Integrator ideal, bei endlicher Verstärkung wirkt er wie ein RC-Glied mit der Zeitkonstanten VR_iC . Jede Integration bedarf nun noch der Festlegung eines Anfangswertes. Dies bedeutet, daß vor Beginn der Rechnung der Integrationskondensator C über einen besonderen Eingang auf den Anfangswert $U_A(0)$ aufgeladen und bis zur Ingangsetzung des Rechenvorganges bei $t = 0$ auf diesem Werte gehalten werden muß.

Auf diese Weise sind mit dem Gleichstromverstärker die Rechenoperationen der Vorzeichenumkehr, der Summation und der Integration zu erledigen. Dabei lassen sich durch unterschiedliche Eingangswiderstände schon eine Reihe fest wählbarer Koeffizienten anbringen. Beliebige einstellbare Koeffizienten erhält man, indem man z. B. den Eingängen eines Summators oder Integrators ein Potentiometer vorschaltet, womit dann auch die erste Operation Bild 2 durchführbar ist. Man erkennt leicht, daß man durch Veränderung der Rechenwiderstände im Operationsverstärker viele andere Rechenoperationen erledigen kann. So führt z. B. die Vertauschung von Widerstand und Kapazität beim Integrator zur Differentiation. Überhaupt kann statt der rein reellen



$$U_A \left(1 + \frac{1}{V(p)} \right) \frac{1}{Z} + \sum_1^n \frac{1}{R_i} \left(U_i + \frac{U_A}{V(p)} \right) = 0$$

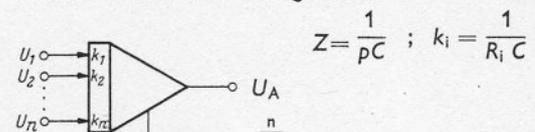
1. Summierverstärker: $Z = R_0$; $R_0/R_i = k_i$



$$U_A = - \sum_1^n \frac{k_i U_i}{1 + \left(1 + \sum_1^n k_i \right) / V(p)}$$

$$U_A (V \rightarrow \infty) = - \sum_1^n k_i U_i$$

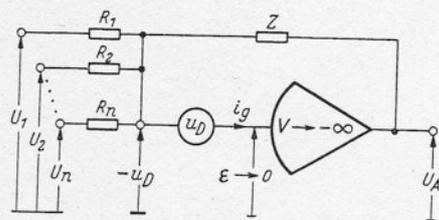
2. Summierender Integrator:



$$U_A = U_A(0) - \frac{\sum_1^n k_i U_i}{p \left(1 + \frac{1}{V(p)} \right) + \sum_1^n \frac{k_i}{V(p)}}$$

$$U_A (V \rightarrow \infty) = U_A(0) - \sum_1^n \int_0^t k_i U_i dt$$

Bild 3: Summierung und Integration mit driffreien Gleichstromverstärkern



$$\sum_1^n (U_i + u_D) \frac{1}{R_i} + (U_A + u_D) \frac{1}{Z} - i_g = 0$$

1. Summierverstärker: $Z = R_0$; $R_0/R_i = k_i$

$$U_A = - \sum_1^n k_i U_i - \underbrace{[u_D (1 + \sum_1^n k_i) - i_g R_0]}_{\text{Fehlervspannung am Ausgang}}$$

2. Integrierverstärker: $Z = \frac{1}{pC}$; $k_i = \frac{1}{R_i C}$

$$U_A = U_A(0) - \sum_1^n \int_0^t k_i U_i dt - \underbrace{(u_D \sum_1^n k_i t - \frac{i_g t}{C})}_{\text{Fehlervspannung am Ausgang}}$$

Bild 4 (oben): Die Wirkung eines Nullpunktfehlers und des Gitterstromes beim Summier- und Integrierverstärker

Bild 5 (rechts): Lösungsschaltung für eine Diff. Gl. zweiter Ordnung. E ist die Maschineneinheit, t^* die Maschinenzeit

Problem:

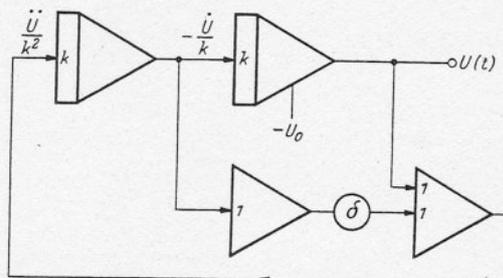
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + r \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0; \quad z(0) = z_0; \quad z'(0) = 0.$$

Normierung:

$$x = \omega_0 t; \quad y = z/z_0 \quad \text{also} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{r}{\omega_0} \frac{dy}{dx} + y = 0;$$

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Schaltung:



Normierung: $x = k t^*$; $y = U/E$

Die Schaltung löst: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \delta \frac{dy}{dx} + y = 0;$
 $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Beziehungen:

$$x = k t^* = \omega t; \quad z = U(t) \cdot \frac{z_0}{E}; \quad \delta = r/\omega_0.$$

oder imaginären Widerstände für die Eingänge oder Rückführung in Bild 3 je ein komplexer Vierpol genommen werden, wobei man sich allerdings wegen der für tiefe Frequenzen schwer zu realisierenden reinen Induktivitäten auf Widerstände und Kapazitäten beschränken wird.

Die wesentlichsten Fehler der Gleichstromverstärker sind der Nullpunktfehler und der Gitterstrom der Eingangsröhre. Der Einfluß dieser beiden Störgrößen ist in Bild 4 dargestellt, wobei u_D eine fiktive, den Nullpunktfehler darstellende Spannung, auch Driftspannung genannt, ist. Von der dadurch bedingten Fehler-spannung am Ausgang ist zu fordern, daß sie bei einem Integrator innerhalb einer vorgesehenen Rechenzeit sich nicht zu merklichen Ausgangsspannungen integriert. Der zweite Anteil in der Fehler-spannung kann durch Wahl eines kleinen Gitterstromes ($1 \cdot 10^{-10}$ A) ausreichend klein gehalten werden. Zur Korrektur des ersten Anteiles, des Nullpunktfehlers, reicht bei hochwertigen Integratoren eine sorgfältige Verstärkerdimensionierung und öfters wiederholte Nullung allein nicht aus. Hier muß eine automatische Nullung vorgenommen werden, wofür die von Goldberg angegebene Chopperstabilisierung ein hervorragendes Mittel ist. Dabei wird davon Gebrauch gemacht, daß durch die Gegenkopplung bei $V \rightarrow -\infty$ am Eingang des Verstärkers eine meßbare Spannung $-u_D$ auftreten muß (Bild 4). Sie wird durch einen Modulverstärker, also Zerhacker, Wechselstromverstärker und Phasengleichrichter, gemessen. Der so verstärkte Nullpunktfehler wird dem zweiten Steuergitter einer Eingangsdifferentialstufe zugeführt und vermindert dadurch den Nullpunktfehler um einen Faktor gleich der Verstärkung des Modulverstärkers.

Die Rechenoperation der Summierung und Integration lassen sich mit bemerkenswerter Genauigkeit realisieren und man kann zeigen, daß diese beiden Operationen in Verbindungen mit Koeffizienten-Potentiometern lineare Diff.Gl. mit konstanten Koeffizienten lösen. Bild 5 gibt dafür ein einfaches Beispiel. Man geht dabei von der höchsten Ableitung aus, bildet durch eine Kette von Integratoren alle anderen Ableitungen und erfüllt über einen Summenverstärker die vorgegebene Diff.Gl. Am Ausgang des Summenverstärkers liegt dann die höchste Ableitung, die durch Rückkopplung in dem so gebildeten geschlossenen Wirkungskreis zustande kommt (Thompson 1876).

In dem einfachen Beispiel Bild 5 ist die stets notwendige Übersetzung von den Problemvariablen in die MaschinenvARIABLEN mit angegeben. Am besten nimmt man eine Normierung beider Variablen auf eine dimensionslose Größe vor. Die normierten Größen im Problem und in der Maschinenschaltung sind einander gleich, woraus sich dann die Beziehungen zwischen Problem- und MaschinenvARIABLEN ergeben.

Rein theoretisch läßt sich nun eine Rechenkette wie in Bild 5 mit Differenzierschaltungen ebenso leicht aufbauen wie mit Integratoren, und man erkennt aus Bild 3, daß aus dem Integrator bei der Vertauschung von R_i mit C eine Differenzierschaltung wird. Praktisch trifft dies in keiner Weise zu, weil der Verstärker nicht für

alle Frequenzen ein $V \rightarrow -\infty$ haben kann, sondern auf jeden Fall $V \rightarrow 0$ bei $\omega \rightarrow \infty$ werden muß. Für die Lösung der Diff.Gl. genügt es nun, wenn die Rechengerate nahezu ideal in dem Frequenzbereich sind, der in der Lösung enthalten ist. Die Rechenkette muß aber für alle anderen Frequenzen stabil sein. Der Integrator ist technisch gesehen ein Verstärker mit einem Frequenzgang proportional $1/\omega$. Bei sehr hohen Frequenzen, bei denen die Verstärker versagen, hat er also auf jeden Fall eine sehr kleine Verstärkung und die Rechenkette ist stabil. Die Differenzierschaltung ist theoretisch ein Verstärker mit einem Frequenzgang proportional ω und weicht also gerade dort stark vom idealen Verhalten ab, wo die Verstärkung in der Rechenkette sehr hoch sein müßte. Dies führt in jedem Falle zur völligen Instabilität einer mit Differenzierschaltungen aufgebauten Rechenkette und zwingt dazu die Rechnung mit Integratoren durchzuführen.

b) Die Multiplikation

Die Lösung einer Diff.Gl. mit nichtkonstanten Koeffizienten oder von nichtlinearen Diff.Gl. erfordert als zusätzliche Recheneinheiten Multiplikatoren und die Bildung von Funktionen. Vor allem die Multiplikation bringt besondere Schwierigkeiten, weil es keine elektronischen Elemente gibt, die unmittelbar mit ausreichender Genauigkeit diese Operation erledigen. Beim mechanischen Analogrechner bildet man das Produkt $xy = \int x dy + \int y dx$ durch zwei Integratoren. Der elektronische Analogrechner hat diese Möglichkeit nicht, weil er nicht über eine beliebige Variable, sondern immer nur über der Zeit integrieren kann. Die zuerst in Gleichstromanalogrechnern benutzten Multiplikatoren waren servogesteuerte Potentiometer. Wird in Bild 6a das obere Potentiometer mit der Maschineneinheitsspannung $\pm E$ gespeist, so kann man durch eine motorische Folgeregelung die Spannung am Schleifer auf Gleichheit mit dem Multiplikanden x bringen. Der Schleifer steht dann in der relativen Höhe $\alpha = U_1/E$ und am zweiten gekoppelten und völlig identischen Potentiometer, welches mit $\pm U_2$ gespeist wird, steht am Schleifer das Produkt $U_A = U_1 U_2/E$.

Dieses Verfahren läßt sich auf eine hohe Genauigkeit bringen, hat aber den großen Nachteil der trägen motorischen Regelung und ist deshalb in schnellen Rechnern nicht anwendbar. Das Prinzip läßt sich aber verallgemeinern, wenn man für die beiden Potentiometer wie in Bild 6b, zwei zueinander gleiche, durch eine Größe r steuerbare Systeme $R_1 R_2$ setzt. Wie oben sollen dabei beide Systeme so geregelt werden, daß in R_1 eine Eingangsgröße E auf U_1 heruntergeteilt wird, so daß das mit U_2 gespeiste zweite System am Ausgang das Produkt $U_1 U_2/E$ liefert. Auf diesem Prinzip beruhen mehrere Verfahren mit Doppelmodulation. Eine dieser Methoden wendet z. B. gleichzeitig AM und FM an. R_1 und R_2 bestehen dabei aus zwei gleichen Amplitudenmodulatoren mit nachgeschaltetem FM-Demodulator, dessen Ausgang proportional der steuernden Spannung E in R_1 bzw. U_2 in R_2 ist und gleichzeitig proportional einer Frequenzabweichung. Steuert man die Frequenzabweichung nun so, daß der Ausgang von R_1 gleich U_1 wird, so wird der Ausgang von R_2 gleich $U_1 U_2/E$. Auf diese Weise ist das Prinzip rein elektronisch realisiert und ergibt eine Genauigkeit, die nur noch von der Gleichheit der beiden gesteuerten Systeme abhängt. Eine andere Möglichkeit bietet eine Pulsdoppelmodulation (PLM und PAM), die in Bild 7 dargestellt ist. Die steuerbaren Systeme bestehen dabei aus elektronischen Umschaltern. Der Ausgang des ersten Schalters geht additiv mit U_1 zu einem Integrator, der beim Erreichen fester Endwerte $\pm E$ eine Flip-Flop-Schaltung umkippt, die ihrerseits die Schalter betätigt. Es kommt so zu einer Selbsterregung des Systems auf einer Frequenz, die von U_1 und der Zeitkonstanten des Integrators abhängt und zu einem Schaltverhältnis, daß der Mittelwert des Ausgangs von R_1 gleich $-U_1$ wird, denn nur beim Verschwinden der mittleren Gleichspannung am Integratoreingang bleibt sein Ausgang in der Amplitude beschränkt. Das Schaltverhältnis von R_1, R_2 gibt also bezogen auf den zeitlichen Mittelwert eine Spannungsteilung $-U_1/E$, so daß am Ausgang von R_2 hinter einem Filter der Mittelwert $U_1 U_2/E$, also das gewünschte Produkt steht.

Eine ganz andere Klasse von elektronischen Multiplikatoren benützt das Zwei-Parabelverfahren. Quadriert man $(x + y)$ und $(x - y)$ und bildet dann die Differenz,

so verschwinden die Quadrate und es bleibt die Summe der Kreuzprodukte also $xy = \frac{1}{4} [(x + y)^2 - (x - y)^2]$. Es gibt nun eine Reihe darauf basierender Methoden, die sich nur dadurch unterscheiden, wie die quadratische Charakteristik gewonnen wird. Benützt man natürlich gegebene Charakteristiken von spannungsabhängigen

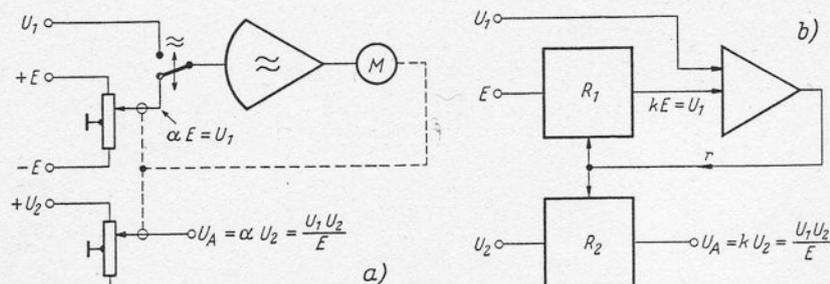


Bild 6: Prinzip der Multiplikation a) mit servogesteuerten Potentiometern, b) dessen Verallgemeinerung

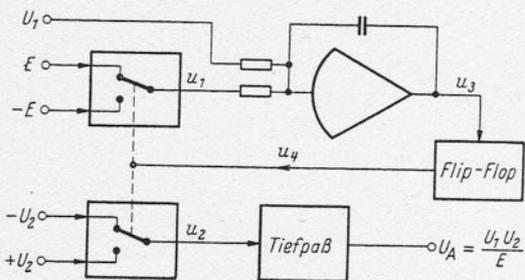
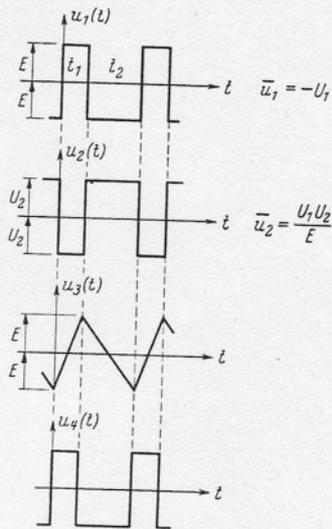


Bild 7 oben und unten: Prinzip eines elektronischen Multiplikators mit Doppelmodulation (Pulsweiten- und Pulsamplitudenmodulation).



Multiplikation keineswegs erschöpft; es gibt noch weitere bewährte Verfahren, z. B. die von Gundlach angegebene Elektronenstrahlröhre.

Mit den Multiplikatoren läßt sich auch die Rechenoperation der Division durchführen. Vertauscht man in einem Multiplikator, der auf dem Prinzip von Bild 6b beruht, U_2 mit der Maschineneinheit E , so wird $U_A = E U_1 / U_2$, womit die Division schon beendet ist. Bei jedem beliebigen Multiplikator läßt sich die Rechenoperation durch eine in Bild 8 dargestellte Methode umkehren. Bei der Division sind aber einige Punkte zu beachten, z. B. darf der Ausgang die Maschineneinheit nie überschreiten, d. h. stets muß $|U_1| < |U_2|$ sein. U_2 darf nie einen Nulldurchgang haben, denn beim Umkehren des Vorzeichens von U_2 wird das Regelsystem instabil, gleichgültig ob man Bild 8 oder das abgewandelte Prinzip Bild 6b voraussetzt. Für ständig negative U_2 müßte an irgendeiner Stelle des Regelsystems das Vorzeichen gewechselt werden.

c) Die Bildung von Funktionen

Die Funktionsgeber sind die zweite nichtlineare Rechenoperation, die man für die Behandlung allgemeiner gewöhnlicher Diff.Gl. braucht. Funktionen der unabhängigen Variablen, der Zeit, treten als Störfunktion und als nichtkonstante Faktoren auf. Viele solcher Zeitfunktionen kann man mit Hilfe der linearen Rechenelemente allein erhalten, z. B. wenn die benötigte Funktion als Lösung einer linearen Diff.Gl. darstellbar ist. Manchmal aber und immer bei Funktionen von einer unabhängigen Variablen, die ihrerseits wieder eine Funktion der Zeit ist, also $f(U_1(t))$, braucht man spezielle Funktionsgeber. Darunter sei eine Einheit verstanden mit einem Eingang U_1 und einem Ausgang, der sich auf eine vorgegebene Funktion $U_A = f(U_1)$ einstellen läßt. Eine rein elektronische Möglichkeit dafür ist die Methode der Approximierung einer Funktion durch ein Polygon wie in Bild 9 dargestellt. Hier sind eine größere Zahl Diodenzweige parallel geschaltet, wobei ein Summenverstärker über alle Diodenströme addiert. Jede Einzeldiode ist bei einer Eingangsspannung unterhalb der Sperrspannung gesperrt und gibt oberhalb einen linearen Anteil, d. h. liefert für das Polygon einen Knickpunkt. Über ein Potentiometer P_1 kann jede Diode frei wählbar vorgespannt werden und ihr Stromanteil am Summenpunkt kann durch ein zweites Potentiometer P_2 von Null bis zu einem Maximalwert geregelt werden. Ein einzelner Diodenzweig kann nun an $+U_1$ oder $-U_1$ liegen, seine Vorspannung kann positiv oder negativ sein und die Diode kann auf zweierlei Art gepolt sein. Es gibt also acht Möglichkeiten, zwischen denen umgeschaltet werden kann, und sie bedeuten, daß der Beitrag einer Diode in der Ausgangsspannung mit wahlweise positivem oder negativem Anstieg in einem wählbaren Quadranten der $U_1, f(U_1)$ Ebene liegt. Mit etwa zehn Dioden dazu evtl. einer Tangente durch den Ursprung und einer Ordinatenverschiebung lassen sich schon viele Funktionen ausreichend genau darstellen. Es gibt sogar manche Beziehungen, die sich mit einem

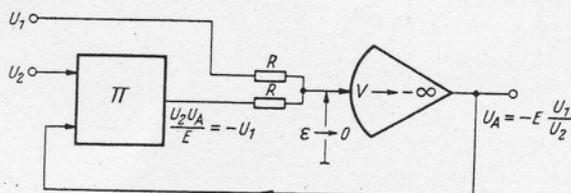
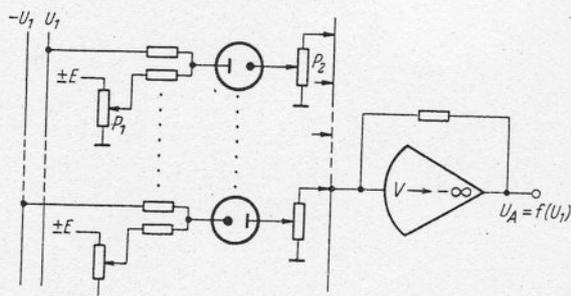


Bild 8: Die Umkehrung einer Multiplikation zur Division.

Bild 9 (rechts): Das Verfahren der Approximierung einer Funktion $y = f(x)$ durch einen Polygonzug.

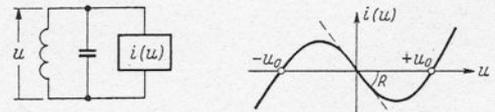


noch viel kleineren Aufwand darstellen lassen, etwa der $|U_1|$ oder $\text{sgn } U_1$, oder auch die elektronischen Äquivalente für Ansprechschwellen, Getriebelose, Hysterese, Reibung und Aussteuerbegrenzungen, die für die Berechnung technischer Regelsysteme von großer Bedeutung sind.

Für langsamere Analogrechner sind Funktionstische mit der aufgezeichneten Funktion $f(U_1)$ in Gebrauch, wobei U_1 über eine Servosteuerung eingestellt wird und die zugehörige Ordinate $f(U_1)$ der Kurve entsprechend automatisch durch eine Folgeregelung nachgeführt und nach außen abgegeben wird. Die Kurve wird optisch oder elektrisch abgetastet. Im letzteren Falle muß die Kurve mit einer leitfähigen Tinte aufgetragen werden, liegt an einer Spannung oder führt einen Strom. Ohne Zweifel sind Funktionsgeber dieser Art bei weitem am genauesten, erfordern aber wegen der Trägheit ihrer mechanisch bewegten Abtastsysteme eine lange Rechenzeit.

Ein Anwendungsbeispiel

Als Beispiel für die Anwendung des elektronischen Analogrechners bei nichtlinearen Diff.Gl. wird in Bild 10 die *van der Polsche* Gleichung dargestellt. Das physikalische Problem ist die Anfachung von Schwingungen mit stabiler Endamplitude, z. B. die Anfachung eines Parallelkreises durch ein Dynatron, dessen Charakteristik eine kubische Funktion ist. Bild 10 zeigt die Maschinenschaltung und die Normierung. Bei einem solchen Problem wird man natürlich eine große Raffung der Zeitskala vornehmen. Das Ergebnis zeigt Bild 11. Von besonderem Interesse ist hier der mit steigendem ε stetige Übergang des Schwingungsverhaltens zu einer Kippschwingung.



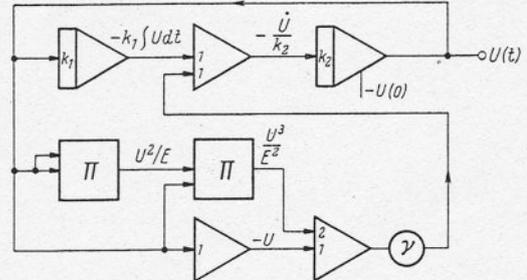
$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt + \frac{u}{R} \left[\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 - 1 \right] = 0$$

Normierung:

$$z = \frac{u}{u_0}; \quad \varepsilon = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad x = \frac{t}{\sqrt{LC}} = \omega_0 t$$

$$\text{ergibt: } \frac{dz}{dx} + \int z dx + \varepsilon (z^3 - z) = 0$$

Lösungsschaltung:



$$\frac{1}{k_2} \frac{dU}{dt^*} + k_1 \int U dt^* + \gamma \left(2 \frac{U^3}{E^2} - U \right) = 0$$

Normierung: $y = \frac{U}{E}; \quad \varepsilon = \gamma \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}; \quad x = \sqrt{k_1 k_2} t^*$

$$\text{ergibt: } \frac{dy}{dx} + \int y dx + \varepsilon (2y^3 - y) = 0$$

Beziehungen: $\sqrt{2} y = z; \quad t = t^* \sqrt{k_1 k_2} / \omega_0$

Bild 10: Die Maschinenschaltung und Normierung für die nichtlineare *van der Polsche* Diff. Gl. E ist die Maschineneinheit, t^* die Maschinenzzeit

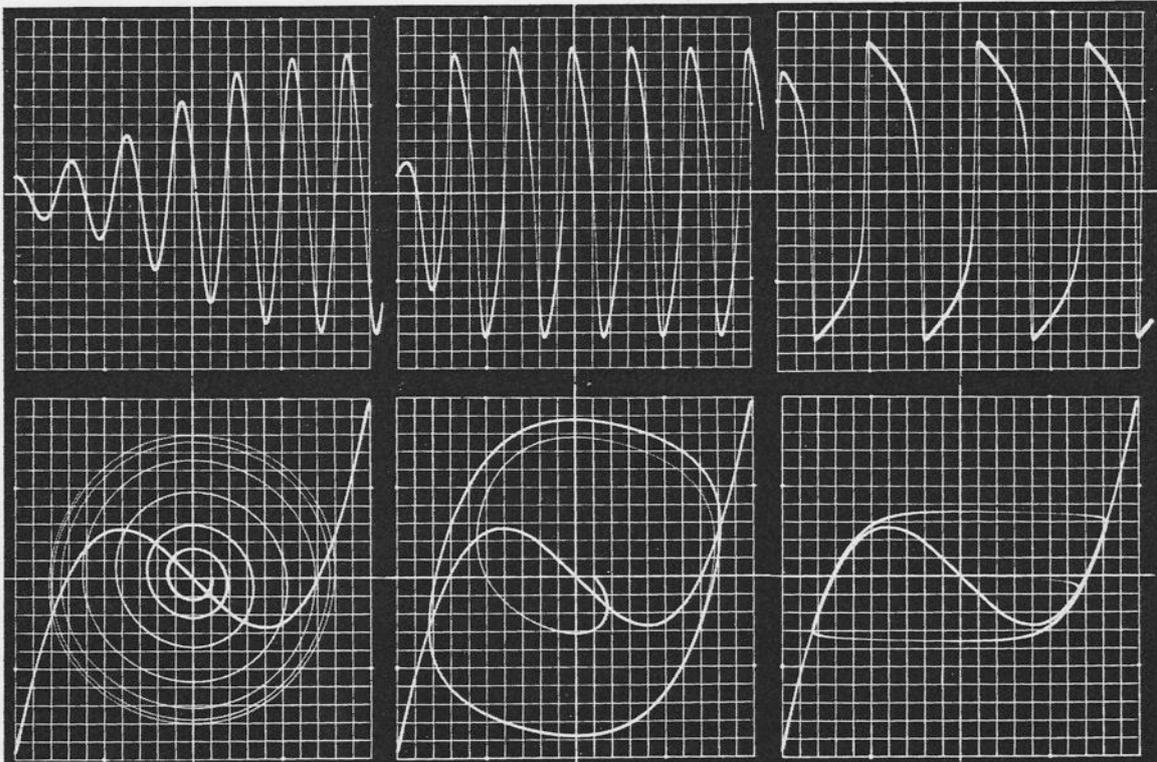


Bild 11: Die erhaltenen Lösungen für die *van der Polsche* Diff.Gl. für $\varepsilon = 0, 2; 1, 0; 5$. Die obere Reihe stellt $y(t)$ dar mit der Amplitudenskala ± 1 und der Zeitskala $T^* = 0$ bis 4 s. Die untere Skala zeigt die Phaseebene $-1/k_1 k_2 \int y dx = f(y)$ mit eingezeichneter Anfachungscharakteristik.

Die Fehlerwirkung des Operationsverstärkers im Analogrechner

Von A. Kleiy

Die linearen Rechenoperationen, Summation und Integration, werden im elektronischen Gleichstromrechner mit gegengekoppelten Gleichspannungsverstärkern durchgeführt. Fehler werden verursacht durch das nicht-ideale Verhalten der Rechenimpedanzen, durch die endliche, frequenzabhängige Verstärkung des Gleichstromverstärkers, durch dessen mangelhafte Nullpunkt Konstanz und durch seinen Eingangsstrom.

1. Der Operationsverstärker mit endlicher, frequenzabhängiger Verstärkung und mit nichtidealen Rechenimpedanzen

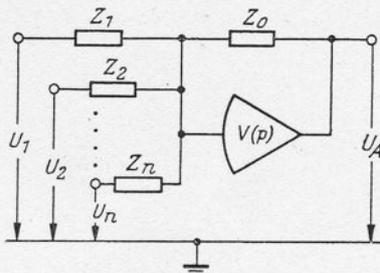


Bild 1: Operationsverstärker

Bild 1 zeigt das Schaltbild eines Operationsverstärkers bestehend aus einem ideal nullpunkt-konstanten Gleichspannungsverstärker mit der Verstärkung $V(p)$, einer Rückführimpedanz Z_0 und einer Reihe von Eingangsimpedanzen Z_i , die mit den Eingangsspannungen U_i beschaltet sind. Für die Ausgangsspannung erhält man

$$U_A = - \sum_{i=1}^n \frac{Z_0}{Z_i} U_i \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{V_s(p)}}; \quad V_s(p) = \frac{V(p)}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{Z_0}{Z_i}} \quad (1)$$

(Unter U_A und U_i sollen die Laplacetransformierten der Ausgangs- und Eingangsspannungen verstanden sein).

Dabei ist $V_s(p)$ die Schleifenverstärkung. Bei der Bildung von $V_s(p)$ ist nur über die beschalteten Eingänge zu summieren. Angestrebt wird ein sehr hoher Betrag der Schleifenverstärkung, indem man die Verstärkung $V(p)$ sehr groß macht. In diesem Fall wird U_A praktisch unabhängig von $V_s(p)$ und ist nur noch durch das Verhältnis der Impedanzen Z_0 und Z_i gegeben. Ist dieses Verhältnis reell und frequenzunabhängig, erhält man einen idealen Summator; ist es imaginär und proportional bzw. umgekehrt proportional der Frequenz, erhält man einen idealen Differentiator bzw. Integrator [1] [2].

Die Realisierung eines sehr hohen Betrags der Schleifenverstärkung über ein breites Frequenzband ist aber prinzipiell nicht möglich. $V_s(p)$ muß nämlich aus Stabilitätsgründen oberhalb einer gewissen Grenzfrequenz f_g in definierter Weise gegen Null abfallen [3]. Dabei wird f_g um so kleiner, je höher $|V_s(p)|$ unterhalb f_g ist. Im allgemeinen legt man f_g über die höchste Frequenz im Spektrum der Eingangsfunktionen (Rechenfrequenzen). Dadurch ist dann $|V_s(p)|$ bei den Rechenfrequenzen auf einen Maximalwert beschränkt.

1.1 Fehler beim Summator ($Z_0 = R_0$; $Z_i = R_i$)

Aus Gründen der Stabilität [3] muß der Rückführwiderstand R_0 meist mit einer kleinen Kapazität C_0 überbrückt werden. Für die relativ tiefen Rechenfrequenzen kann man den Einfluß des Frequenzgangs der Schleifenverstärkung und der Rückführungsimpedanz Z_0 durch eine einzige Zeitkonstante T_s beschreiben:

$$U_A = - \sum_{i=1}^n k_i U_i \cdot \left(1 - \frac{1}{V_s(0)}\right) \cdot \frac{1}{1 + p T_s}; \quad k_i = \frac{R_0}{R_i} \quad (2)$$

Dabei ist der Betrag der Schleifenverstärkung bei der Frequenz Null $V_s^-(0) \gg 1$ angenommen. Aus Gl. (2) kann man zwei Fehlerquellen erkennen:

a) einen statischen Fehler $1/V_s(0)$, hervorgerufen durch die endliche Gleichstromverstärkung. Dieser wächst nach Gl. (1) mit der Anzahl der beschalteten Eingänge und mit den Bewertungsfaktoren k_i . Für sieben beschaltete Eingänge mit den Bewertungsfaktoren $k_i = 1; 1; 1; 4; 4; 10; 10$ und eine Gleichstromverstärkung $V_0 = 2 \cdot 10^4$ erhält man z. B. einen relativen statischen Fehler von $1,7\%$. Daß natürlich auch die Toleranzen der Rechenwiderstände R_0 und R_i zu statischen Fehlern führen, ist trivial.

b) einen frequenzabhängigen dynamischen Fehler durch die Zeitkonstante T_s . Diese ist bei einem Verlauf der Schleifenverstärkung

$$V_s(p) = \frac{-V_s(0)}{(1 + p T_g)^2} \text{ gegeben durch } T_s = \frac{2 T_g}{V_s(0)} + R_0 C_0 \quad (3)$$

In Gl. (3) überwiegt der zweite Summand stark, da $V_s(0)$ sehr groß ist. Der durch $R_0 C_0$ hervorgerufene Fehler läßt sich z. B. durch kapazitive Überbrückung der Eingangswiderstände R_i kompensieren. Eine andere

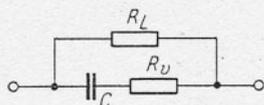
Methode macht davon Gebrauch, daß dieser Fehler bei tiefen Frequenzen praktisch ein reiner Phasenfehler ist. Der Rückführwiderstand wird durch ein T-Glied überbrückt (Bild 2). Für $x \ll 1$, d. h. $\omega \ll 1/R_0 C_0$ ist

$$J = \frac{U_A}{R_0} (1 + x^2 \alpha),$$

d. h. der Phasenfehler ist praktisch unterdrückt. Übrig bleibt ein quadratisch mit der Frequenz ansteigender Betragsfehler. Die Phasenfehler lassen sich also beim Summator durch einfache Mittel verschwindend klein halten.

1.2 Fehler beim Integrator

Die Eingangswiderstände sind reell, als Rückführung dient eine Kapazität.



$$Z_0 \approx \frac{1 + R_V C p}{C p \left(1 + \frac{1}{R_L C p}\right)}$$

Bild 3: Rückführung beim Integrator

Die Kondensatorverluste berücksichtigen wir durch eine Paralleableitung R_L und einen Serienwiderstand R_V (Bild 3). Die Schleifenverstärkung geht hier infolge der Rückführung über eine Kapazität bei tiefen Frequenzen gegen Null. Man erhält deshalb für die Laplacetransformierte der Ausgangsspannung

$$U_A = - \sum_{i=1}^n k_i U_i \cdot \frac{1 + R_V C p}{p + 1/T_0} \cdot \frac{1}{1 + p T_2} + U_A(0); \quad k_i = \frac{1}{R_i C} \quad (4)$$

$U_A(0)$ ist der Anfangswert der Ausgangsspannung bei $t = 0$ (siehe auch Abschn. 2). Die Zeitkonstanten T_0 und T_2 sind von der Gleichspannungsverstärkung V_0 abhängig. Bei einem Frequenzverlauf der Verstärkung

$$V(p) = \frac{V_0}{1 + p T_g}; \quad V_0 \gg 1$$

sind T_0 und T_2 durch die Ausdrücke

$$T_0 = \frac{R_L C \cdot V_0 / \sum k_i}{R_L C + V_0 / \sum k_i}; \quad T_2 = \frac{T_g}{V_0} \quad (5)$$

gegeben. Da T_g/V_0 eine sehr kleine Größe ist, ist der letzte Faktor der Gl. (4) für die tiefen Rechenfrequenzen ohne Einfluß. Der Integrator wirkt also, wenn man den Serienwiderstand R_V vernachlässigt, wie ein RC-Glied mit einer endlichen Zeitkonstanten T_0 , die sich nach Gl. (5) zusammensetzt aus der Zeitkonstanten $R_L C$ des Integrationskondensators und einem Anteil, der durch die endliche Verstärkung V_0 bedingt ist. Dieser wächst mit der Anzahl der beschalteten Eingänge und mit den Bewertungsfaktoren k_i und überwiegt meist bei der Verwendung von guten Integrationskondensatoren.

Als Kriterium für das Verhalten eines Integrators soll die Integration eines Spannungssprungs untersucht werden. Wir legen an einen der Eingänge mit dem Bewertungsfaktor k_i zur Zeit $t = 0$ eine Gleichspannung U_i . Der Anfangswert $U_A(0)$ sei Null. Der ideale Integrator würde einen zeitproportionalen Anstieg der Ausgangsspannung liefern:

$$U_A(t) = - U_i k_i t \quad (6)$$

Der wirkliche Integrator liefert aber einen exponentiellen Anstieg mit der Zeitkonstanten T_0 , wie man durch inverse Laplacetransformation von Gl. (4) erhält (T_2 und R_V sind vernachlässigt):

$$U_A(t) = - k_i T_0 U_i (1 - e^{-t/T_0}). \quad (7)$$

Die relative Abweichung vom linearen Verlauf ist bei kleinem t/T_0

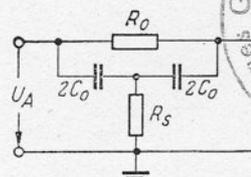
$$\varepsilon_i = - t/2 T_0. \quad (8)$$

Dadurch ist bei Vorgabe eines maximalen Fehlers ε_i die Integrationszeit beschränkt. Für $k_i = 1/s$, $R_0 C_0 = 10^6 s$, $\varepsilon_i = 2 \cdot 10^{-3}$ und $V_0 = 2 \cdot 10^4$ ergibt sich z. B. $t \leq 40 s$.

Die Integration eines Spannungssprungs ist vor allem dann von Interesse, wenn der Integrator in einer offenen Rechenkette, z. B. zur Bildung gewisser Störfunktionen, betrieben wird.

1.3 Fehlerwirkung in geschlossenen Rechenkettten

Bei den meisten Anwendungsfällen, z. B. bei der Lösung von Differentialgleichungen, werden die Operationsverstärker als Glieder einer geschlossenen Rechenkette betrieben [2]. Von Macnee [6] wurde für eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten die Lösung berechnet, die ein Analogrechner mit Integratoren und Summatoren von der Form der Gl. (2) und Gl. (4) liefert. Dabei wird allerdings der Serienwiderstand R_V des Integrationskondensators nicht berücksichtigt. Macnee kommt dabei



$$J = \frac{U_A}{R_0} \cdot \frac{1 - x^2 \alpha + j x \alpha}{1 + j x \alpha}$$

$$x = \omega R_0 C_0; \quad \alpha = \frac{4 R_s}{R_0}$$

Bild 2: Überbrücktes T-Glied als Rückführung zur Phasenkompensation

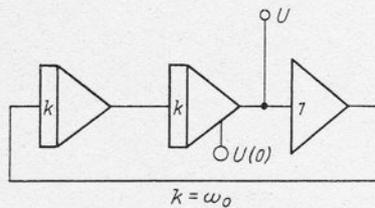


Bild 4: Schaltung zur Lösung der Diff.Gl. (9)

zu folgendem Ergebnis: Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung des Analogrechnersystems sind gegen die der gegebenen Differentialgleichung um kleine komplexe Größen verschoben, welche Funktionen der Zeitkonstanten T_0 , T_2 und T_s sind. Außerdem treten zusätzliche Wurzeln auf, weil der Analogrechner ein System höherer Ordnung darstellt. Diese liefern jedoch sehr schnell abklingende Exponentialvorgänge.

Es soll hier die Fehlerwirkung bei der Lösung der Differentialgleichung für die ungedämpfte Schwingung untersucht werden, welche oft als Kriterium für die Güte von Operationsverstärkern dient. Da die Lösung in der Phasenebene einen Kreis beschreibt, nennt man dieses Kriterium die Kreisprobe.

Die Analogrechnerschaltung nach Bild 4 löst unter der Annahme idealer Integratoren und Summatoren die Diff. Gl.

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U = 0 \quad (9)$$

für $k = \omega_0$. Diese besitzt zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung auf der imaginären Achse: $p_{1,2} = \pm j\omega_0$.

Mit Integratoren und Summatoren von der Form der Gl. (2) und Gl. (4) erhält man unter der Voraussetzung kleiner Abweichungen von $\pm j\omega_0$ die Werte

$$p_{1,2} = -(1/T_0) - \omega_0 \operatorname{tg} \vartheta + \omega_0^2 T_2 + (\omega_0^2 \cdot T_s/2) \pm j\omega_0 \quad (10)$$

Dabei ist der Verlustwinkel des Integrationskondensators $\operatorname{tg} \vartheta = R_v C \omega_0$ eingeführt. Statt einer ungedämpften Schwingung liefert der Analogrechner eine exponentiell zeitabhängige Amplitude $A_0 \cdot e^{\delta t}$ mit dem Schwellmaß

$$\delta = -(1/T_0) - \omega_0 \operatorname{tg} \vartheta + \omega_0^2 T_2 + \omega_0^2 \cdot T_s/2 \quad (11)$$

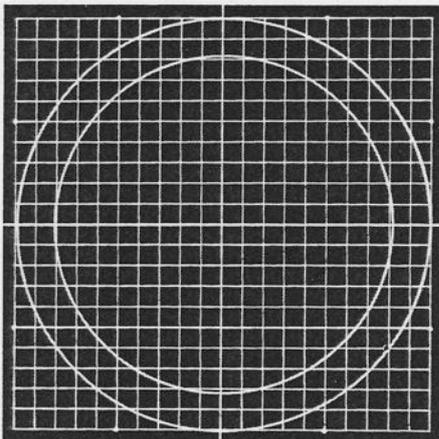


Bild 5: Lösung der Diff.Gl. (9) in der Phasenebene: $\dot{U} = f(U)$

nach 100 s (innerer Kreis) bei $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$. Daraus läßt sich ein $\delta = -2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ entnehmen.

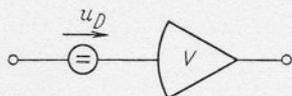


Bild 6: Ersatzbild eines Gleichspannungsverstärkers mit Nullpunktfehler

2. Nullpunktfehler und Gitterstrom

Da bei einem Gleichspannungsverstärker die einzelnen Stufen direkt gekoppelt sind, bewirkt jede Arbeitspunktänderung eine Änderung der Ausgangsspannung. Man beobachtet deshalb auch bei fehlender Eingangsspannung eine Ausgangsspannung, d.h. eine Abweichung vom Nullpunkt, die sich im allgemeinen mit der Zeit nur sehr langsam ändert, über deren genauen Zeitverlauf sich aber nichts aussagen läßt. Man kann sie sich durch einen ideal nullpunkt-konstanten Verstärker mit vorgeschalteter Spannungsquelle u_D (Bild 6) entstanden denken. Dabei soll u_D dieselbe Spannung am Ausgang erzeugen, die beim wirklichen Verstärker durch Nullpunkt-abwanderung entsteht. u_D wollen wir als Nullpunktfehler bezeichnen. Seine physikalischen Ursachen sind Änderungen der Speisegleichspannungen, Änderungen der Heizspannungen, Röhrenalterung und Temperaturschwankungen.

Da die Röhren im allgemeinen mit genügend hohen Gittervorspannungen betrieben werden, stört beim Operationsverstärker nur der negative Gitterstrom der Eingangsstufe. Seine Ursachen sind mangelhaftes Vacuum, mangelhafte Isolation des Gitters gegen die übrigen Elektroden und thermische Gitteremission [4].

In Bild 7 ist das Schaltbild eines Operationsverstärkers mit Nullpunktfehler u_D und Gitterstrom i_g dargestellt. Für $V = -\infty$ ergibt sich

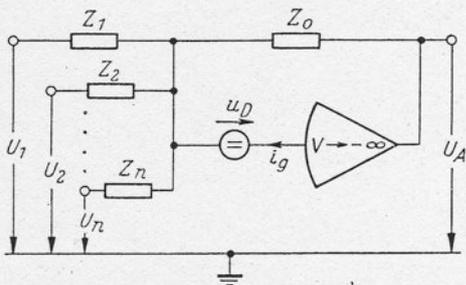


Bild 7: Operationsverstärker mit Nullpunktfehler und Gitterstrom

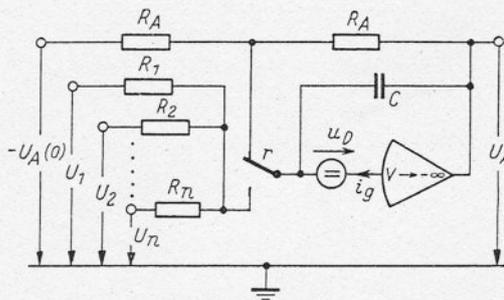


Bild 8: Integrator mit Nullpunktfehler und Gitterstrom

$$U_A = - \sum_{i=1}^n \frac{Z_0}{Z_i} U_i + u_D \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{Z_0}{Z_i} \right) - i_g \cdot Z_0 \quad (12)$$

Als Folge von u_D und i_g tritt am Ausgang eine Fehlerspannung auf, die sich aus zwei Anteilen zusammensetzt: Der Gitterstromanteil ist nur abhängig von der Rückführimpedanz Z_0 . Der Anteil durch den Nullpunktfehler ist nur abhängig vom Gegenkopplungsverhältnis $k = 1/(1 + \sum Z_0/Z_i)$. Beim Summator erhält man

$$U_A = - \sum_{i=1}^n k_i U_i + u_D \left(1 + \sum_{i=1}^n k_i \right) - i_g R_0; \quad k_i = R_0/R_i \quad (13)$$

Beim Integrator muß man zwischen Rückstellschaltung und Rechenschaltung unterscheiden (Bild 8). In der Rückstellschaltung (gezeichnete Stellung des Relaiskontaktes r) bekommt der Integrator seinen Anfangswert $U_A(0)$ durch Aufladen des Integrationskondensators über die beiden Widerstände R_A . Da dies einer Summierschaltung entspricht, ist nach Gl. (13) der Anfangswert um den Betrag $2 u_D - i_g R_A$ falsch. Bei Beginn der Rechnung ($t = 0$) legt das Relais r um. Für $t \geq 0$ gilt dann

$$U_A = - \sum_{i=1}^n k_i \frac{U_i}{p} + U_A(0) + 2 u_D - i_g R_A + \sum_{i=1}^n k_i \frac{u_D}{p} - i_g \frac{1}{C p}; \quad k_i = \frac{1}{R_i C} \quad (14)$$

Wenn sich u_D und i_g nur sehr langsam ändern, kann man sie für die Dauer der Rechnung als Konstanten behandeln. Man erhält dann für den zeitlichen Verlauf von U_A

$$U_A(t) = - \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i \int_0^t U_i(t) dt}_{\text{Idealwert}} + \underbrace{U_A(0) + 2 u_D - i_g R_A}_{\text{Anfangswertfehler}} + \underbrace{t \left(\sum_{i=1}^n k_i \cdot u_D - \frac{i_g}{C} \right)}_{\text{Driftfehler}} \quad (15)$$

Man erhält also einen Fehler des Anfangswertes und einen mit der Zeit ansteigenden Fehler, den man den Driftfehler nennt. Da dieser das Produkt einer vom Anfangswert abhängigen Größe und der Zeit ist, muß man bei Integratoren, die über eine längere Zeit integrieren sollen, unbedingt den Nullpunktfehler durch automatische Korrekturverfahren unterdrücken.

2.1 Nullpunkt-korrekturverfahren

Das bekannteste dieser Verfahren ist die von Goldberg [5] angegebene Chopperstabilisierung (Bild 9). Infolge des Nullpunktfehlers u_D muß am Summierpunkt a eine meßbare Spannung auftreten, die bei unendlich hoher Verstärkung V gleich $-u_D$ ist. Diese wird mittels eines exakt nullpunkt-konstanten Verstärkers verstärkt und einem zweiten Eingang des Gleichspannungsverstärkers, z. B. mit Hilfe einer Differentialstufe, in einer solchen Polarität zugeführt, daß sie dem ursprünglichen Nullpunktfehler entgegenwirkt. Als nullpunkt-konstanten Verstärker verwendet man dabei einen Modulverstärker, der aus Modulator, Wechselspannungsverstärker und Phasengleichrichter besteht. Der Modulator selbst darf natürlich keinen Nullpunktfehler haben. Diese Forderung erfüllen am besten mechanische Zerhacker (Chopper). Bei konstantem u_D und i_g erhält man für $t \geq 0$

$$U_A(t) = - \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i \int_0^t U_i(t) dt}_{\text{Idealwert}} + \underbrace{\frac{2 u_D}{1 + V_2} - i_g R_A}_{\text{Anfangswertfehler}} + \underbrace{\frac{u_D}{1 + V_2} \sum_{i=1}^n k_i \cdot t - \frac{i_g}{C} t}_{\text{Driftfehler}} \quad (16)$$

Die Schaltung bewirkt also eine Unterdrückung des von u_D hervorgerufenen Anfangswertfehlers und Driftfehlers um den Faktor $1 + V_2$. Der Einfluß des Nullpunktfehlers ist damit bei genügend hoher Verstärkung V_2 praktisch unterdrückt. Bezüglich des Gitterstroms hat man jedoch nichts gewonnen. Man muß deshalb Ein-

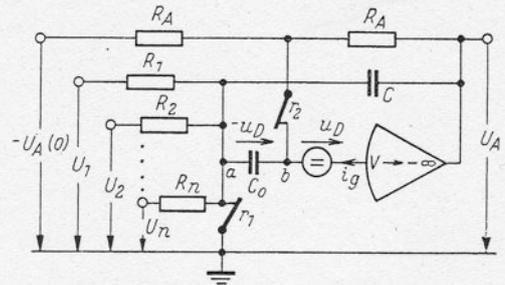
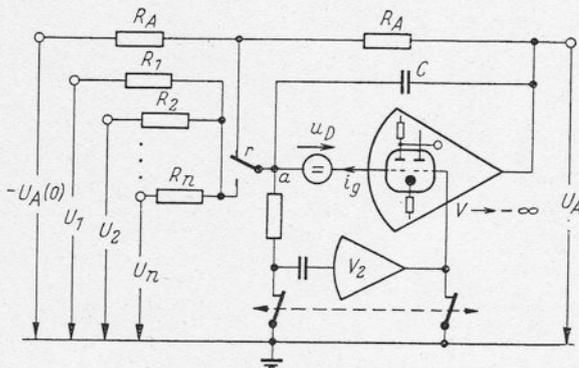


Bild 10: Repetierender Integrator
Bild 9 (links): Chopperstabilisierter Integrator

gangsröhren mit sehr kleinem Gitterstrom verwenden. Läßt man z. B. einen Drifffehler von 0,1 V in 1000 s bei einem C von 1 μ F zu, so braucht man einen Gitterstrom $i_g \leq 10^{-10}$ A.

Beim repetierenden Rechner besteht die Möglichkeit, die Rechenpause zur Nullpunkt Korrektur auszunutzen (Bild 10). Während der Rechenpause sind die Relaiskontakte r_1 und r_2 geschlossen und der Integrator erhält über die beiden Widerstände R_A seinen Anfangswert. Die Schaltung entspricht einer gewöhnlichen Summier-schaltung mit einem Summierpunkt bei b. Der Anfangswert ist daher um $2 u_D - i_g R_A$ falsch. Der Kondensator C_0 lädt sich auf $-u_D$ auf. Bei Beginn der Rechnung ($t = 0$) öffnen die beiden Kontakte r_1 und r_2 . Wir haben jetzt eine Integrationsschaltung mit dem Summierpunkt bei a. Die Spannung u_D und die Spannung am Kondensator $-u_D$ liegen jetzt in Reihe und heben sich gegenseitig auf, d. h. der Nullpunktfehler ist vollständig kompensiert, solange er während der Rechenzeit konstant bleibt. Es bleibt lediglich der Einfluß des Gitterstroms, der den Kondensator C_0 umlädt. Am Summierpunkt a ist dann gegen Erde eine zeitproportionale Spannung $i_g \cdot t / C_0$ zu messen und man erhält für die Ausgangsspannung

$$U_A(t) = - \underbrace{\sum_1^n k_i \int_0^t U_i(t) dt}_{\text{Idealwert}} + \underbrace{U_A(0) + 2 u_D - i_g R_A}_{\text{Anfangswertfehler}} - \underbrace{i_g \frac{t}{C_0} \left(1 + \frac{C_0}{C} + \frac{1}{2} \sum_1^n k_i t \right)}_{\text{Drifffehler}}. \quad (17)$$

Der Anfangswertfehler ist also bei diesem Korrekturverfahren nicht unterdrückt. Der von u_D herrührende Drifffehler ist jedoch völlig ausgeschaltet. Der von i_g verursachte Drifffehler enthält ein Glied mit t^2 . Ist z. B. $i_g = 10^{-10}$ A, $\sum k_i = 1$, $C = 1 \mu$ F, $C_0 = 4 \mu$ F, so wird der Drifffehler in 100s 0,135 V, das ist bei einer Rechen-einheit $E = 100$ V 1,35%. Man sieht, daß man bei diesen Verfahren schon wegen des Gitterstroms in der Rechenzeit stärker begrenzt ist als beim Chopperverfahren. Außerdem kann man bei sehr langen Rechen-zeiten nicht mehr erwarten, daß u_D konstant bleibt. Eine Rechenzeit von 100 s dürfte daher eine obere Grenze bei diesem Verfahren sein.

2.2 Fehlerwirkung in geschlossenen Rechenkreisen

Die bisherigen Betrachtungen sind dann von Interesse, wenn die Integratoren in offenen Rechenkettens, z. B. bei der Bildung von Störfunktionen, betrieben werden. Werden die Operationsverstärker in einem geschlossenen Rechenkreis zur Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten betrieben, so wirken sich die Fehlergrößen Nullpunktfehler und Gitterstrom je nach Art der Diff.Gl. in völlig verschiedener Weise aus. Besitzt die Diff.Gl. nur Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der linken p -Halbebene, beschreibt sie also z. B. ein stabiles physikalisches System, so wird die Lösung, die infolge dieser Fehlergrößen auftritt, stets endlich bleiben, da die Analogrechnerschaltung selbst ein stabiles physikalisches System darstellt. Dies läßt sich für eine lineare Diff.Gl. n -ter Ordnung leicht beweisen und ist auch physikalisch einzusehen.

Völlig anders verhält sich der Analogrechner, wenn die zu lösende Diff.Gl. Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit positivem Realteil hat. Ein solches System hat nur labile Gleichgewichtszustände, aus denen es durch die geringste Störung zur Instabilität übergeht, in denen es sich daher nicht beliebig lange halten läßt. Als Beispiel soll die lineare Diff.Gl. erster Ordnung mit einem p_1 -Wert auf der positiv reellen Achse behandelt werden:

$$\dot{U} - a U = S(t) \text{ Anfangswert } U(0); a > 0. \quad (18)$$

Die Laplacetransformierte der Lösung lautet

$$\dot{U}(p) = \frac{pU(0) + \mathcal{L}S(t)}{p-a}, \quad (19)$$

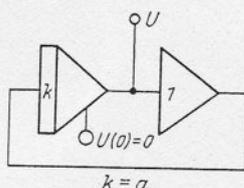


Bild 11:
Schaltung zur Lösung der
Diff.Gl. (18)

für $U_A(0) = 0$ und $S(t) \equiv 0$ ist die Lösung $U(t) \equiv 0$. Eine Analogrechen-schaltung nach Bild 11 liefert aber infolge der Nullpunktfehler und des Gitterstroms die Lösung

$$U(p) = \frac{p(2u_{Di} - i_{gi}R_A) + ku_{Di} - (i_{gi}/C) + k(2u_{Ds} - i_{gs}R_0)}{p - a} \quad (20)$$

Dabei sind mit dem Index i die Fehlergrößen des Integrators, mit dem Index s die des Summators bezeichnet. Der Analogrechner liefert also die Lösung für einen Anfangswert $U(0)^* = 2u_{Di} - i_{gi}R_A$ und eine konstante Störfunktion $S^* = u_{Di} \cdot k - i_{gi}/C + k(2u_{Ds} - i_{gs}R_0)$, d. h. einen ansteigenden Exponentialvorgang von der Form

$$U(t) = U(0)^* e^{at} + \frac{S^*}{a} (e^{at} - 1) \quad (21)$$

Die Lösung $U(t) \equiv 0$ kann also der Analogrechner überhaupt nicht liefern, weil infolge Nullpunktfehler und Gitterstrom stets eine Störfunktion S^* und ein Anfangswert $U(0)^*$ vorhanden ist.

Was an diesem Beispiel gezeigt wurde, gilt prinzipiell für alle linearen Diff.Gl. mit p_1 -Werten in der rechten Halbebene. Bei diesen lassen sich zwar mathematisch durch entsprechende Wahl der Anfangsbedingungen die exponentiell ansteigenden Lösungen ausschließen, was durchaus einem physikalischen Problem entsprechen kann. Dabei müssen aber diese Anfangswerte exakt stimmen, wenn vermieden werden soll, daß für hohe Werte des Arguments doch die instabilen Lösungen auftreten und schließlich überwiegen. Die Anfangswerte sind aber grundsätzlich nicht beliebig genau; sie waren bei unserem Beispiel um $U(0)^*$ falsch und wir hatten außerdem noch eine Störfunktion S^* erhalten. Dieses Problem tritt bei solchen Diff.Gl. grundsätzlich bei allen Rechenmaschinen, auch beim Digitalrechner auf, denn es ist im Grunde genommen das Problem der Stellengenauigkeit der eingegebenen Anfangswerte, die allerdings beim Ziffernrechner mit entsprechendem Aufwand viel höher getrieben werden kann als beim Analogrechner.

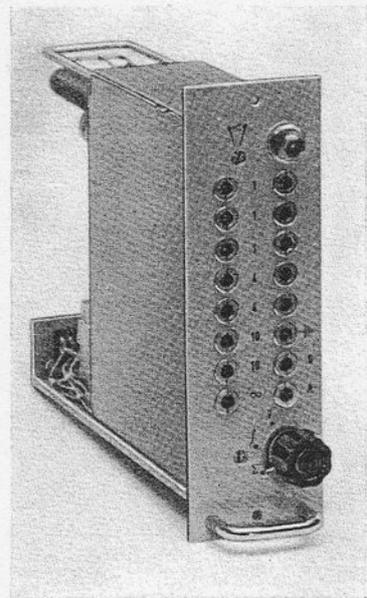


Bild 12: Operationsverstärker mit Rechenelementen für Summierung und summierende Integration

Literatur

- [1] Korn u. Korn: Electronic analog computers, McGraw Hill. 1956 2. Auflage.
- [2] Kettel, E.: Übersicht über die Technik der elektronischen Analogrechner. Telefonken-Zeitung, Jg. 30 (Juni 1957) H. 116 S. 128...134.
- [3] Bode, H. W.: Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. Bell System Techn. Journ. 19 (Juli 1940), S. 421...454.
- [4] Rothe H., Kleen, W.: Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren. Akad. Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.G. Leipzig 1948.
- [5] Goldberg, E. A.: Stabilization of D-c Amplifiers RCA Rev. 11 (1950), S. 296...300.
- [6] Macnee, A. B.: Some limitations on the accuracy of electronic differential analyzers. Proc. IRE. Vol. 40 (1952), S. 303...315.
- [7] Wagner, K. W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation. I. A. Barth Verlag, Leipzig 1950.

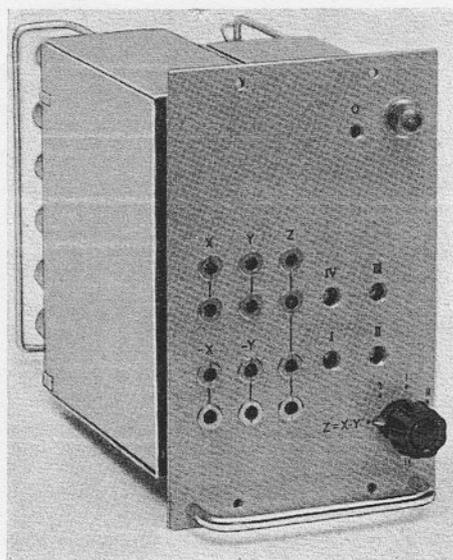


Bild 1: Der elektronische Multiplikator

Ein Multiplikator nach dem Zwei-Parabel-Verfahren

Von W. Schneider

Mit dem vorliegenden Aufsatz soll die Wirkungsweise eines Multiplikators beschrieben werden, dem das Prinzip der Addition zweier Parabeln entsprechend der Identität

$$U_1 \cdot U_2 = \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{U_1 - U_2}{2} \right)^2 \quad (1)$$

zugrunde liegt, und dessen Parabeln mit Hilfe linearisierter, verschieden vorgespannter Diodenkennlinien durch einen Polygonzug approximiert werden [1]. Des weiteren soll auf die hierbei auftretenden Probleme eingegangen und Aussagen über die erzielbare Genauigkeit gemacht werden.

Ein Multiplikator dieser Art (Bild 1) besteht, wie in Bild 2 dargestellt ist, aus einem nichtlinearen Diodennetzwerk N , das die beiden Parabeln von Gl. (1) erzeugt, und einem Summierver-

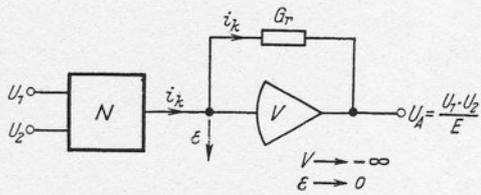


Bild 2: Prinzipschaltbild eines Multiplikators nach dem Zwei-Parabelverfahren

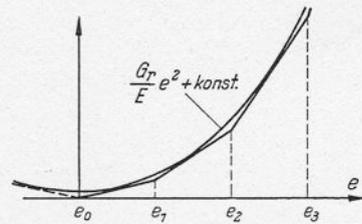


Bild 3: Approximierung der Parabel $(G_r/E)e^2 + \text{const.}$ durch ein Tangentenpolygon

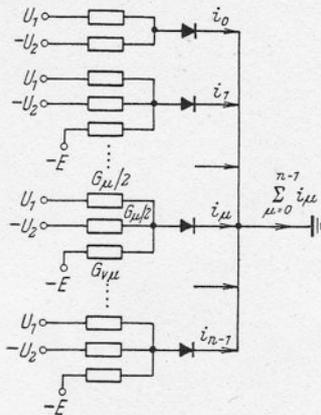


Bild 4: Schaltung zur Realisierung des Tangentenpolygons für den Parabelast:

$$\frac{G_r}{E} \left(\frac{U_1 - U_2}{2} \right)^2 + \text{const.}$$

$$\text{im Bereich: } 0 \leq \frac{U_1 - U_2}{2} \leq E$$

stärker, dessen innere Verstärkung $V \rightarrow -\infty$ gemacht wird. Damit wird die Fehlerspannung ϵ am Summierpunkt des Verstärkers infolge der Gegenkopplung über den Leitwert G_r gegen Null gedrückt. Das vorgeschaltete Netzwerk wird daher bei sekundärem Kurzschluß betrieben, denn es muß zur Bildung und Addition der Parabeln erreicht werden, daß die vom Netzwerk auf den Summierpunkt fließenden Ströme sich rückwirkungsfrei addieren. Soll die Ausgangsspannung U_A gleich dem Produkt $U_1 \cdot U_2/E$ sein, wobei E die Maschineneinheit, die größte Rechenspannung ($= 100 \text{ V}$), bedeute, dann folgt zwangsläufig für den Kurzschlußstrom i_k :

$$i_k = -G_r \frac{U_1 \cdot U_2}{E} = \frac{G_r}{E} \left(\frac{U_1 - U_2}{2} \right)^2 - \frac{G_r}{E} \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \right)^2 \quad (2)$$

d. h. i_k läßt sich auffassen als Summe zweier Parabelcharakteristiken in Abhängigkeit von den beiden Spannungen:

$$\frac{U_1 - U_2}{2} = e \quad \text{bzw.} \quad \frac{U_1 + U_2}{2} = e' \quad (3)$$

Die Approximierung einer Parabel

Da die Genauigkeit der Parabeln von Gl. (2) unmittelbar die Rechengenauigkeit des Multiplikators bestimmt, sind zu diesem Zweck nur solche Parabelcharakteristiken brauchbar, die neben der gewünschten Genauigkeit auch eine ausreichende Konstanz in bezug auf Alterung, Temperatur- und Betriebsschwankungen besitzen. Beim vorliegenden Multiplikator wird dieses Problem dadurch gelöst, daß man die oben erwähnten Parabeln in der in Bild 3 dargestellten Weise durch Polygonzüge approximiert. Diese ergeben sich durch Addition längs der Abszisse entsprechend verschobener, stark linearisierter Diodenkennlinien und werden mit Hilfe von Netzwerken nach Art von Bild 4 realisiert. Diese bestehen aus einer Anzahl parallel geschalteter Dioden, die über die Leitwerte $G_{v\mu}$ vorgespannt und über zwei gleichgroße Leitwerte $G_{\mu}/2$ an die beiden Rechenspannungen gelegt sind. Die Parallelschaltung der beiden Rechenleitwerte $G_{\mu}/2$ wirkt so, als wäre die halbe Summe der Rechenspannungen (in Bild 4 $U_1 - U_2/2 = e$) an einem einzigen Leitwert G_{μ} wirksam. Ist in Bild 4 $e > (G_{v\mu}/G_{\mu}) E$, dann fließt durch die betreffende Diode ein zu e proportionaler Strom i_{μ} . Für $e < (G_{v\mu}/G_{\mu}) E$ ist die betreffende Diode gesperrt, so daß $i_{\mu} = 0$ wird. Die Abhängigkeit des Diodenstromes i_{μ} von e ist also eine bei $e_{\mu} = (G_{v\mu}/G_{\mu}) E$ geknickte Kennlinie, und die Summe aller i_{μ} bei geeigneter Dimensionierung der Widerstände ein Polygonzug entsprechend Bild 3. Eine solche Schaltung kann jedoch nur einen einzigen Parabelast approximieren, da die Dioden nur für ein Vorzeichen von $(U_1 \pm U_2)/2$, in Bild 4 beispielsweise für $(U_1 - U_2)/2 > 0$, Strom führen können. Die Anzahl der Dioden einer solchen Gruppe stimmt aus diesem Grunde mit der Zahl n der Streckenabschnitte je Parabelast überein. Das in Bild 3 gezeichnete Polygon sei Tangentenpolygon zu einer Parabel von der Form $(G_r/E) \cdot e^2 + \text{const.}$, wobei die additive Konstante sich bei der Differenzbildung in Gl. (2) wieder heraushebt. Verlangt man von diesem Polygon, daß seine größten, absoluten Abweichungen von der Parabel an allen Knickstellen gleich groß sind, dann müssen alle Knickpunkte e_{μ} ($\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$) in äquidistanten Abszissenabständen aufeinander folgen, und die Differenz zwischen den Anstiegen zweier aufeinanderfolgender Tangenten an allen Knickpunkten gleich groß sein. Wenn nun in Bild 4 der Diodenstrom i_{μ} unter Verwendung der Abkürzung $(U_1 - U_2)/2 = e$ definiert ist in der Form:

$$i_{\mu} = \begin{cases} = 0 & \text{für } e \leq e_{\mu} \\ = G_{\mu} (e - e_{\mu}) & \text{für } e \geq e_{\mu} \end{cases} \quad (4)$$

wobei $e_{\mu} = (G_{v\mu}/G_{\mu}) E$ ist, dann ergibt sich aus den obengenannten Forderungen, daß die Rechenleitwerte

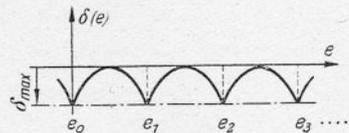
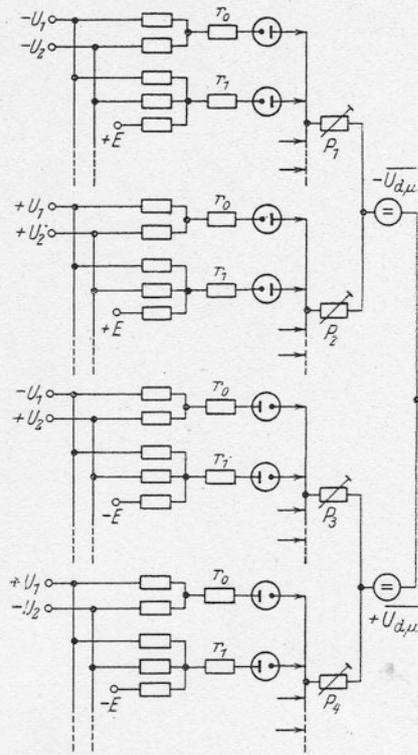


Bild 6: Der auf den Endwert bezogene Fehler der Tangentenapproximierung in Abhängigkeit von der Parabelabszisse e .

= 100 V bezogene Fehler verstanden. Von Interesse ist der maximale Fehler δ_{\max} an den Polygonknickpunkten e_{μ} . Dieser hängt nur von der Anzahl der Dioden ab und sein Betrag berechnet sich zu:

$$|\delta_{\max}| = \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad (5)$$

wenn n die Anzahl der Dioden je Parabelast bedeutet, und das Tangentenpolygon bei der größten Abszissen-spannung $[(U_1 \pm U_2)/2]_{\max} = E = 100 \text{ V}$ die Parabel gerade berührt. Es läßt sich zeigen, daß $|\delta_{\max}|$ zugleich der theoretisch maximal mögliche Produktfehler $|\Delta U_1 U_2/E|_{\max}$ ist, unabhängig davon, ob Tangenten-, Sehnen- oder Sekantenapproximierung verwendet wird. Durch beliebige Erhöhung der Diodenzahl n läßt sich der Produktfehler nur theoretisch beliebig klein machen. Bei vier Dioden je Parabelast ergibt Gl. (5) einen Fehler von 2%, bei 8 Dioden 0,4%, bei 12 Dioden 0,2%. Der hiermit verbundene Aufwand ist infolge der unvermeidbaren Dioden- und Widerstandsstreuungen nur bis zu einer bestimmten Diodenzahl n_{\max} gerechtfertigt. Bei Verwendung von Glühdioden ist diese Grenze bereits bei etwa $n_{\max} = 8$ erreicht, d. h. bei einem Produktfehler von etwa 0,4%. Bei Siliziumdioden liegt diese Grenze infolge der geringeren Streuungen höher.

Abrundung des Polygons mittels einer HF-Spannung

Eine Möglichkeit, die Genauigkeit ohne Erhöhung der Diodenzahl noch weiter zu steigern, besteht darin, daß man zur Rechenspannung $(U_1 \pm U_2)/2$ eine kleine hochfrequente Wechselfspannung addiert. Dadurch tritt in der Umgebung der Polygonknickpunkte ein Richtstrom auf, der die Polygonecken abrundet. Durch geeignete Wahl der HF-Amplitude läßt sich der Fehler δ_{\max} am Knickpunkt zu Null machen. Dies wäre bei sinusförmiger HF-Spannung der Fall, wenn ihre Amplitude der Bedingung genüge:

$$|U_{\text{HF}}| = \frac{\pi}{8} (e_{\mu} - e_{\mu-1}) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2n-1} \cdot E. \quad (6)$$

Diese Spannung müßte am Multiplikatoreingang der Spannung e bzw. e' additiv überlagert werden. Dies läßt sich jedoch nur mit einem beachtlichen Aufwand an Siebmitteln erreichen, so daß es günstiger ist, die Hoch-

$G_{\mu}/2$ für $\mu = 1, 2, 3 \dots n-1$ alle gleich groß sein und die Leitwerte $G_{v\mu}$ für die Vorspannung über μ eine arithmetische Reihe bilden müssen. Eine Ausnahme bildet lediglich die erste Diode $\mu = 0$, für die $G_0 = G_{1, 2, 3 \dots}/2$ sein muß.

In Bild 5 ist nun das Prinzipschaltbild des Multiplikators mit dem vollständigen Diodennetzwerk dargestellt. Da zur Bildung von $U_1 \cdot U_2$, unter Zulassung jeder beliebigen Vorzeichen-

Bild 5 (links): Vollständiges Schaltbild eines Diodenmultiplikators mit Glühdioden, Kompensation der Anlaufspannung $\overline{U_{d,\mu}}$ und Abrundung der Polygonecken durch eine HF-Spannung

kombination von U_1 und U_2 , zwei vollständige Parabeln erforderlich sind, eine Diodengruppe nach Bild 4 jedoch nur einen Parabelast approximieren kann, werden für das Netzwerk vier solche Diodengruppen benötigt. Diese sind jeweils mit denselben Widerstandswerten ausgerüstet und unterscheiden sich lediglich in der Polung ihrer Dioden und hinsichtlich ihrer Speisung. Wie aus Bild 5 ersichtlich, müssen dem Multiplikator die beiden Rechenspannungen U_1 und U_2 in beiden Polaritäten zur Verfügung stehen.

Der theoretische Fehler der Approximierung

Der theoretische Fehler der Tangentenapproximierung ergibt in Abhängigkeit von der Spannung e bzw. e' (Gl. (3)) eine aus Parabelbögen gemäß Bild 6 zusammengesetzte Fehlerkurve. Hierbei sei unter $\delta(e)$ der auf den Parabelendwert $i_{k \max} = G_r E$ bzw. auf die maximale Ausgangsspannung $(U_1 \cdot U_2/E)_{\max} = E$

frequenz in der in Bild 5 angedeuteten Weise (niederohmig) am Summierpunkt einzuführen. Damit gelingt es jedoch nicht mehr, δ_{\max} für alle Knickpunkte gemeinsam zum Verschwinden zu bringen, weil die Leitwertverhältnisse $G_{v\mu}/G_{\mu}$ für jede Diodenstrecke verschieden sind. Man ist daher gezwungen, für die Amplitude der HF-Spannung einen Durchschnittswert zu wählen, der, wie die Praxis zeigt, zu durchaus brauchbaren Ergebnissen führt. Für die Wahl der Frequenz ergeben sich zwei sich widerstrebende Forderungen. Um einerseits die HF-Komponente ohne nennenswerte Beeinflussung der tiefen Rechenfrequenzen aussieben zu können, sollte die Frequenz möglichst hoch sein; andererseits läßt sich dieser Forderung nur insoweit nachkommen, als sich die Polygonknickpunkte infolge Aufladung der parasitären Kapazitäten des Diodennetzwerks noch nicht verschieben. Die HF-Spannung kann auf zwei verschiedene Weisen ausgesiebt werden. Entweder schaltet man vor den Verstärker ein Tiefpaßfilter oder man begrenzt die Bandbreite des Summierverstärkers derart, daß seine Verstärkung V für die Frequenz von U_{HF} auf $V < 1$ abgefallen ist.

Die Fehlerquellen des Multiplikators

Statische Fehler: Unter den statischen Fehlerquellen lassen sich stehende Fehler, die sich durch entsprechende Maßnahmen beheben lassen, und statistische Fehler, die durch Streuungen hervorgerufen werden, unterscheiden.

Von den stehenden Fehlerquellen ist der schwerwiegendste Anteil durch die Anlaufspannung der Dioden bedingt, da diese eine Verschiebung der Polygonknickpunkte bewirkt und damit die Approximierung in unzulässiger Weise beeinflusst. Wenn $U_{d\mu}$ die Diodenlaufspannung sei, dann ist die Verschiebung des Knickpunktes e_{μ} :

$$\Delta e_{\mu} = (1 + G_{v\mu}/G_{\mu}) \cdot U_{d\mu}, \quad (7)$$

d. h. sie ist mindestens so groß, wie die Anlaufspannung selbst. Bei Glühodioden mit einer durchschnittlichen Anlaufspannung von etwa 0,6 V ergibt sich damit eine Knickpunktverschiebung von mindestens 0,6% des Endwerts. Dieser Effekt läßt sich für den Durchschnittswert der Anlaufspannung $\overline{U_{d\mu}}$ durch Kompensation mittels niederohmiger Gleichspannungsquellen in der in Bild 5 angedeuteten Weise beheben.

Damit die Änderung der Anlaufspannung infolge Heizspannungsschwankungen den durch die geforderte Genauigkeit zulässigen Wert nicht überschreitet, muß die Heizspannung stabilisiert werden. Soll der Parabelendwert auf 0,1% konstant bleiben, dann ist eine Heizspannungskonstanz von 5% erforderlich.

Eine weitere Fehlerquelle bringt der endliche, nichtlineare Durchlaßwiderstand der Dioden, durch den alle Diodenkennlinien trotz starker Linearisierung einen u. U. nicht vernachlässigbar gekrümmten Verlauf annehmen. Die hierdurch bedingten Abweichungen von der theoretischen Approximierung lassen sich durch entsprechende Korrekturwiderstände r_{μ} (Bild 5) in erster Näherung beseitigen.

Statistische Fehler ergeben sich durch Streuung der Diodenlaufspannung und der Widerstandswerte. Bei Glühodioden können die Streuungen der Anlaufspannungen um den arithmet. Mittelwert $\overline{U_{d\mu}}$ bis zu einigen zehntel Volt betragen, so daß trotz Kompensation von $\overline{U_{d\mu}}$ mit Knickpunktverschiebungen von einigen %₀₀ zu rechnen ist. Daher sind Glühodioden vor Gebrauch zu altern und nach gleichen Anlaufspannungen auszusuchen.

Abweichungen der Widerstandswerte von ihren Sollwerten bewirken sowohl eine Verschiebung der Knickpunkte als auch eine Veränderung des Kennlinienanstiegs. Es läßt sich nachweisen, daß der Fehler infolge falschen Kennlinienanstiegs gegenüber dem Fehler, der durch die Verschiebung der Knickpunkte bedingt ist, nur eine untergeordnete Rolle spielt. Ist ϱ die prozentuale Widerstandstoleranz, dann ist im ungünstigsten Falle mit einer relativen Knickpunktverschiebung von 2ϱ zu rechnen. Wegen der großen Anzahl von Widerständen ist jedoch zu erwarten, daß die Widerstandsfehler sich weitgehend kompensieren, was die Fehlermessung auch bestätigt.

Zusammenfassend ist also zu sagen, daß die Approximierung einer ganzen Reihe von Fehlereinflüssen ausgesetzt ist, wobei die Verschiebung der Knickpunkte den wesentlichen Teil ausmacht. Will man eine Genauigkeit weit besser als 1% erreichen, wird man aus den obengenannten Gründen nicht umhin können, die Parabeläste an den Endpunkten und Scheitelpunkten zu eichen, was durch die in Bild 5 mit $P_1, \dots, 4$ benannten niederohmigen Potentiometer durchgeführt wird.

Dynamischer Fehler: Um beim Multiplikator einen dynamischen Fehler angeben zu können, muß eine Eingangsspannung konstant (z. B. $U_1 = 100$ V) sein, so daß der Multiplikator die Übertragungseigenschaft eines linearen Vierpols annimmt. Sein dynamischer Fehler läßt sich damit in der für lineare Rechenverstärker üblichen Weise definieren [2]. Beim Diodenmultiplikator ist dieser Fehler allein durch die Eigenschaft des Summierverstärkers bestimmt.

Gemessene Rechenfehler an einem Diodenmultiplikator gemäß Bild 4

Abschließend seien nun noch einige Fehlerkurven gezeigt, wie sie an einem Multiplikator mit sechs Glühdioden je Parabelast bei Abrundung der Polygonecken und unter Ausnutzung aller im vorhergehenden Abschnitt genannten Mittel zur Herabsetzung der Fehlereinflüsse gemessen wurden.

Bild 7 zeigt den Nullpunktsfehler des Multiplikators, d. h. die auf den Endwert bezogene Multiplikatorausgangsspannung für den Fall, daß eine Eingangsspannung (U_1) gleich Null gemacht und die andere (U_2) von $-E$ bis $+E$ verändert wird. Damit müßte die Ausgangsspannung des Multiplikators für alle U_2 theoretisch verschwinden. Wie aus Bild 7 ersichtlich, wird dies mit einer Genauigkeit von besser als 0,1% erreicht.

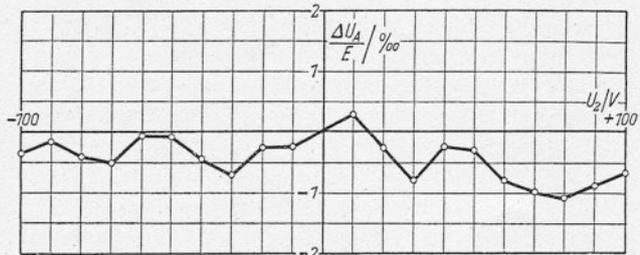


Bild 7: Der auf den Endwert E bezogene Nullpunktsfehler des Multiplikators für $U_1 = 0$ in Abhängigkeit von U_2

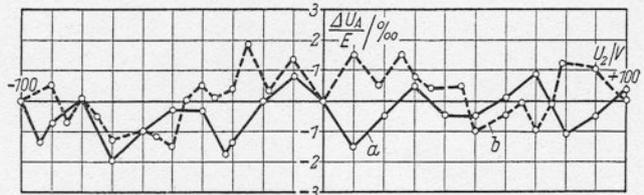


Bild 8: Der auf den Endwert E bezogene Multiplikationsfehler für die Rechenbeispiele:
 $U_1 = E = \text{const.}$, so daß $U_A = U_2$ (Kurve a)
 $U_1 = U_2$, so daß $U_A = (1/E) U_2^2$ (Kurve b)
 in Abhängigkeit von U_2

In zwei weiteren Rechenbeispielen, deren Fehler in Bild 8 dargestellt sind, wurde einmal die Eingangsspannung U_1 konstant gleich der Maschineneinheit $E = 100$ V gesetzt und das andere Mal $U_1 = U_2$ gemacht. Für die Ausgangsspannung U_A in Abhängigkeit von der veränderlichen Eingangsspannung ergibt sich theoretisch im ersten Fall die Gerade $U_A = U_2$ und im anderen die Parabel $U_A = U_2^2/E$. Wie aus den Kurven von Bild 8 zu entnehmen ist, bleibt bei beiden Rechenbeispielen der maximale Fehler unter 0,2%. Ohne Abrundungen der Polygonecken müßte bei $n = 6$ Dioden je Parabelast der maximale Fehler nach Gl. (5) etwa 0,8% betragen. Dies bedeutet, daß die Abrundung des Polygons durch die Hochfrequenz einen statischen Genauigkeitsgewinn mindestens um den Faktor 4 liefert.

Der dynamische Phasenfehler des Multiplikators wurde, wie in Bild 5 angedeutet, durch ein überbrücktes T-Glied in der Rückführung des Verstärkers für die tiefen Rechenfrequenzen kompensiert. Damit bleibt als dynamischer Fehler nur ein Amplitudenfehler übrig, der mit der Frequenz, entsprechend Bild 9, quadratisch ansteigt.

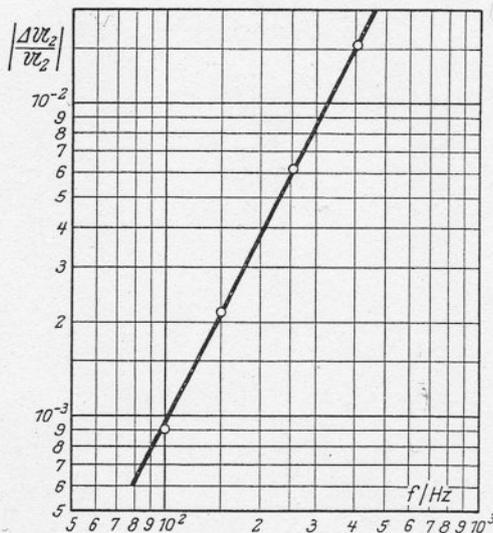


Bild 9: Der dynamische Fehler des Multiplikators in Abhängigkeit von der Frequenz

Literatur

- [1] Burt E. G. C. und Lange, O. H.: Function generators based on linear interpolation with applications to analogue computing. Proc. I. E. E. 102 (1955), S. 856...857.
- [2] Kley, A.: Die Fehlerwirkung des Operationsverstärkers im Analogrechner. Telefunken-Zeitung, Jg. 30 (Juni 1957), H. 116. S. 135... 140.