

Redaktion **Dr. H. K. Schuff**

unter Mitwirkung von

Dr. Heinz Christen, Hamburg

Dr. F. R. Güntsch, Konstanz

Prof. Dr. W. Haack, Berlin

Prof. Dr. H. Herrmann, Braunschweig

N. D. Hill, Hayes/England

Dr. Franz J. P. Leitz, Ludwigshafen/Rh.

Dr. E. Liebel, Redenfelden/Obb.

Prof. Dr. A. van Wijngaarden,  
Amsterdam

# elektronische datenverarbeitung

**Fachberichte über  
programmgesteuerte Maschinen und ihre Anwendung**

**Heft 5/1962**

## Die Lösung partieller Differentialgleichungen und ihre Darstellungsmöglichkeiten auf dem elektronischen Analogrechner

Mit 33 Bildern

W. Ameling, Aachen

**Zusammenfassung:** Nach einer kurzen Übersicht über den elektronischen Analogrechner und die angewandte Programmierung werden die verschiedenen Lösungsverfahren und Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen mit dem elektronischen Analogrechner behandelt. Neben den angegebenen Fehlerabschätzungsmethoden werden verschiedene Darstellungsmöglichkeiten der Lösungsfunktionen betrachtet und einige bisher unbekannte Möglichkeiten angegeben.

**Summary:** After a short summary about the electronic analog computer and the necessary programming the different solution procedures and methods of solution for partial differential equations on the electronic analog computer are treated. Besides the given methods for error estimation different possibilities for interpreting the solutions are considered and some previously unknown possibilities are mentioned.

### 1. EINLEITUNG

Während gewöhnliche Differentialgleichungen nur eine einzige unabhängige Veränderliche enthalten, sind in partiellen Differentialgleichungen mehrere, mindestens zwei unabhängige Veränderliche vorhanden. Partielle Differentialgleichungen kommen deshalb bei all den physikalischen Problemen vor, bei denen die betrachtete Größe nicht nur von der Zeit, sondern auch noch vom jeweiligen Ort abhängt. Bei derartigen Aufgaben, wie Wärmeleitung, Potentialbetrachtung elektromagnetischer Felder, Schwingungsproblemen von Saite, Balken oder Membrane, treten z.B. neben der Zeitgröße  $t$  die Raumkoordinaten  $x, y, z$  (in kartesischen Koordinaten) oder  $r, \varphi, \vartheta$  (in Kugelkoordinaten) als unabhängige Veränderliche auf. Somit muß im allgemeinen mit vier unabhängigen Veränderlichen gerechnet werden; es sei denn, daß gewisse zulässige Vereinfachungen eine Reduzierung der Anzahl der unabhängigen Veränderlichen gestatten. Eine partielle Differentialgleichung kann Ableitung nach allen vorhandenen unabhängigen Veränderlichen enthalten. Soll die Lösungsfunktion  $U$  eine Funktion von  $x, y, z$  und  $t$  sein, so versteht man unter der partiellen Ableitung nach irgendeiner der Veränderlichen den Grenzwert des entsprechenden Differenzenquotienten, z. B.:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(x, y, z, t + \Delta t) - U(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

Bei der Ableitung nach  $t$  sind also  $x, y, z$  als konstant zu betrachten.

Da bei elektronischen Analogrechnern nur die Zeit als unabhängige Veränderliche auftritt, lassen sich auf dem elektronischen Analogrechner grundsätzlich nur Probleme mit einer unabhängigen Veränderlichen lösen. Um den bisherigen Ausführungen elektronischer Analogrechner gerecht zu werden, muß man also nach Verfahren suchen, die es gestatten, eine partielle Differentialgleichung auf eine Anzahl gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen.

Den Ingenieur interessieren von den rein theoretischen Lösungsmöglichkeiten linearer partieller Differentialgleichungen vor allem die Anwendung der Laplace-Transformation, der d'Alembert'sche Ansatz und die Trennung der Veränderlichen (Eigenwertproblem). Die Laplace-Transformation ist vor allem dann mit Vorteil anzuwenden, wenn die Lösungsfunktion der linearen partiellen Differentialgleichungen nur von zwei Veränderlichen abhängt. Bei den Aufgaben des Ingenieurwesens ist stets eine spezielle Lösung, d.h. eine Lösung in einem bestimmten Gebiet, dem Grundgebiet gesucht. Für Probleme mit mehr als zwei Veränderlichen wird das Gebiet entsprechend mehrdimensional. Zur Ermittlung einer eindeutigen Lösungsfunktion einer partiellen Differentialgleichung müssen außer der Angabe des Grundgebietes noch die auf der Berandung des Grundgebietes zu erfüllenden Bedingungen angegeben werden. Vielfach wird eine Unterscheidung in Anfangs-

und Randbedingungen vorgenommen. Im folgenden wollen wir unter Anfangsbedingungen oder Anfangswerten stets die Werte verstehen, die von allen in der Lösungsfunktion auftretenden Raumkoordinaten innerhalb ihrer Variationsgrenzen und der Zeitkoordinate für  $t = 0$  abhängen. Randwerte sind solche Werte, die von allen vorhandenen Raumkoordinaten der Variationsgrenzen und der Zeitkoordinate für  $t > 0$  abhängen. Im Grunde genommen sind Anfangswerte auch Randwerte. Ihre gesonderte Bezeichnung nimmt lediglich Bezug auf die besondere Bedeutung der Veränderlichen  $t$  bei technischen Problemen.

Da bei elektronischen Analogrechnern stets nur die Zeit als unabhängige Veränderliche auftritt, könnte man annehmen, daß der elektronische Analogrechner zur Lösung partieller Differentialgleichungen nicht geeignet ist. Tatsächlich kommt jedoch der Lösung partieller Differentialgleichungen mit dem elektronischen Analogrechner eine immer steigende Bedeutung zu. In der vorliegenden Arbeit werden die für den elektronischen Analogrechner in Frage kommenden Methoden der Trennung der Veränderlichen und die Umformung partieller Differentialgleichungen mittels Differenzenquotienten in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachtet. Den verschiedenen Lösungsverfahren wird kurz die angewandte Programmierung vorangestellt. Der letzte Abschnitt bringt einige bisher unbekanntere Darstellungsmöglichkeiten der Lösungen partieller Differentialgleichungen.

## 2. DIE PROGRAMMIERUNG DES ELEKTRONISCHEN ANALOGRECHNERS

Die Analyse eines vorgegebenen physikalischen Problems gliedert sich in folgende Arbeitspunkte:

1. Aufstellen des Gleichungssystems,
2. Umformung der mathematischen Gleichungen durch Einführen von Maßstabsfaktoren für Zeit und Amplitude in Maschinengleichungen,
3. Herstellung der Rechenschaltung unter Verwendung der verschiedenen Symbole entsprechend den durchzuführenden Rechenoperationen,
4. Bestimmung der Schaltelemente und der Größe der zuzuführenden Spannungen.

Die Grundelemente des elektronischen Analogrechners sind Integrierer, Summierer, Potentiometer, Multiplizierer und Funktionsgeneratoren. Im Bild 2.1 sind die Bezeichnungen der verschiedenen Recheneinheiten, ihre Symbole, die entsprechenden Schaltungen und die mathematischen Formulierungen angegeben. Da die Maschinenzeit stets die unabhängige Veränderliche des Problems ist, soll für die Zeittransformation gelten:

$$\tau = m_{\tau} \cdot t$$

bzw.

$$\tau = m_{\tau} \cdot x$$

Hierin bedeuten:  $\tau$  die Maschinenzeit,  $t$  oder  $x$  die unabhängigen Veränderlichen eines Problems und  $m_{\tau}$  der Zeitmaß-

stabsfaktor. Die Notwendigkeit der Wahl eines Amplitudenmaßstabes ergibt sich aus der Tatsache, daß den abhängigen Veränderlichen des physikalischen oder mathematischen Problems beim elektronischen Analogrechner Spannungen gegen Erde zugeordnet werden. Maximal zulässige Spannungswerte sind im allgemeinen  $\pm 100$  V (Sonderfälle  $\pm 200$  V) bei mit Elektronenröhren bestückten Rechenverstärkern und z. Z.  $\pm 10$  V bei mit Transistoren bestückten Rechenverstärkern. Zur Vermeidung von Verwechslungen zwischen zugeordneten Größen des Problems und der Rechenmaschine werden wir gleiche Bezeichnungen beibehalten und den Maschinengrößen nur ein Zusatzzeichen geben. Dieses Zusatzzeichen möge ein Querstrich über dem Symbol sein. Den Proportionalitätsfaktor wollen wir mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen. Es soll gelten:

$$\bar{y} = \alpha_0 \cdot y$$

oder allgemein

$$\overline{y^{(n)}} = \alpha_n \cdot y^{(n)}$$

Die Bestimmung des Proportionalitätsfaktors erfolgt entsprechend

$$\alpha_n \leq \frac{|y^{(n)}|_{\max}}{|y^{(n)}|_{\max}}$$

Für die Integration gilt allgemein:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} dx + \frac{d^n y}{dx^n} (x=0)$$

Mit den angegebenen Transformationen

$$\overline{y^{(n)}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \cdot \frac{1}{m_{\tau}} \cdot \int_0^{\tau} \overline{y^{(n+1)}} d\tau + \overline{y^{(n)}} (\tau=0)$$

Da sich laut Bild 2.1 für die Ausgangsspannung des Integrators die folgende Abhängigkeit von der Eingangsspannung ergibt:

$$e_0 = -\frac{1}{RC} \int_0^{\tau} e_i d\tau + E$$

erhalten wir  $-\overline{y^{(n)}}$  als Ausgangsspannung, falls die Eingangsspannung  $\overline{y^{(n+1)}}$  ist

$$\text{und } 1. \quad \frac{1}{RC} = k = \frac{1}{m_{\tau}} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$$

$$2. \quad E = -\overline{y^{(n)}} (\tau=0) = -\alpha_n \frac{d^n y}{dx^n} (x=0)$$

ist.

| Bezeichnung                                 | Symbol | Schaltung  | Mathematische Formulierung   |
|---|--------|--|--|
| Hochverstärkender Gleichspannungsverstärker |        |  | $e_0 = -V \cdot e_g$ mit $V \gg 10^4$  |
| Potentiometer                               |        |  | $e_0 = K \cdot e_i$ mit $0 < K < 1$  |
| Koeffizientenverstärker                     |        |  | $e_0 = -k e_i$ mit $0 < k = \frac{R_F}{R}$   |
| Vorzeichenumkehrer                          |        |  | $e_0 = -1 \cdot e_i$   |
| Summierer                                   |        |  | $e_0 = - \sum_{v=1}^n k_v e_v$<br>mit $0 < k_v = \frac{R_F}{R_v}$                                      |
| Einfacher Integrator                        |        |  | $e_0 = -k \int_0^T e_i d\tau + E$<br>$e_0(\tau=0) = E$ mit $0 < k = \frac{1}{RC}$                      |
| Verallgemeinerter Integrator                |        |  | $e_0 = - \int_0^T \sum_{v=1}^n k_v e_v d\tau + E$<br>$e_0(\tau=0) = E$ mit $0 < k_v = \frac{1}{R_v C}$ |
| Multiplizierer                              |        | Versch. Möglichk.:<br>rein elektronisch<br>elektromechanisch   | $e_0(\tau) = -M \cdot e_{i1}(\tau) \cdot e_{i2}(\tau)$<br>mit z. B. $M = 10^{-2} \text{ V}^{-1}$       |
| Funktionsgenerator                          |        | z. B.:<br>Relaisschalter,<br>Diodenschaltung,<br>x-y-Schreiber mit<br>Abtastvorrichtung<br><br>Lösung von<br>Diff.-Gleich.<br>oder s. o. | $e_0 = f(e_i)$<br><br>$e_0 = f(\tau)$  |
| Schreibendes Meßgerät                       |        |  | $e_0 = f(\tau)$  |

Bild 2.1. Symbole der Recheneinheiten

Durch eine aus  $n$ -Integratoren bestehende Integrationskette kommt man somit von  $y^{(n)}$  nach  $\bar{y}$ . Aus diesen erhaltenen Größen baut man nun rückwärts wieder entsprechend der Maschinengleichung  $y^{(n)}$  auf und hat damit die Maschinengleichung erfüllt.

### 3. DIE METHODE DER TRENNUNG DER VERÄNDERLICHEN

Die Anwendung der Lösungsmethode der Trennung der Veränderlichen ist für lineare Systeme wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips zulässig. Mit dieser Methode formen wir eine partielle Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen um. Man geht davon aus, daß die Lösung der partiellen Differentialgleichung von z. B. zwei unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $t$  als eine Kombination zweier Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(t)$  dargestellt werden kann.  $f_1(x)$  soll nur von  $x$  und  $f_2(t)$  soll nur von  $t$  abhängen. Mit diesem Ansatz geht man in die ursprüngliche partielle Differentialgleichung. In vielen Fällen ist es nunmehr möglich, einen Ausdruck für  $f_1(x)$  und deren Ableitungen von einem Ausdruck für  $f_2(t)$  und deren Ableitungen zu trennen. Die einzige Möglichkeit für die gleichzeitige Existenz dieser Ausdrücke in einer Gleichung für beliebige  $x$  und  $t$ -Werte ist die, daß beide gleich einer Konstanten sind. So kommen wir zu zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen für  $x$  und  $t$ . Die Konstante bezeichnen wir mit  $\lambda$ . Die verschiedenen Lösungsfunktionen müssen die Randbedingungen erfüllen. Dies ist jedoch nur für bestimmte Werte von  $\lambda$  der Fall. Die so ermittelten Werte  $\lambda_n$  werden die Eigenwerte des Problems genannt. Die zugehörigen Lösungsfunktionen sind die Eigenfunktionen. Die vollständige Lösung des Problems ergibt sich aus der Summe aller Eigenfunktionen. Als Beispiel sei die eindimensionale Wärmeleitungsaufgabe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \frac{\partial u}{\partial t}$$

betrachtet. Ein isolierter Stab der Länge  $l = 6$  m und der Anfangstemperatur  $U_0(x) = 100^\circ\text{C}$  mit der Materialkonstanten  $c = 10^{-1} \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$  sei gegeben. Die Temperaturverteilung  $u(x, t)$  des Stabes als Funktion der Zeit  $t$  und des Ortes  $x$  ist gesucht, wenn den Enden des Stabes zur Zeit  $t = 0$  eine Temperatur von  $0^\circ\text{C}$  aufgezungen wird.

Wir versuchen mit dem Produktansatz

$$u = f_1(x) \cdot f_2(t) \quad (3.1)$$

die Trennung der Veränderlichen zu erhalten.

Geht man mit diesem Ansatz in die partielle Differentialgleichung, so ergibt sich:

$$f_2(t) \cdot \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = c f_1(x) \frac{df_2(t)}{dt} \quad (3.2)$$

oder

$$\frac{1}{f_1(x)} \cdot \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = c \frac{1}{f_2(t)} \frac{df_2(t)}{dt} \quad (3.3)$$

Soll die gesuchte Lösung in der gesamten  $x$ - $t$ -Ebene gelten, so müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein. Bezeichnen wir diese mit  $-\lambda$ , so gelten die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} + \lambda f_1(x) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{df_2(t)}{dt} + \frac{\lambda}{c} f_2(t) = 0 \quad (3.5)$$

Die Methode der Trennung der Veränderlichen führt im allgemeinen auf ähnliche Ausdrücke. Das Wesentliche an diesen Gleichungen ist der Parameter  $\lambda$ . Die verschiedenen Werte  $\lambda$ , die diese Gleichungen und die vorgegebenen Randbedingungen des Problems erfüllen, sind die Eigenwerte des Problems. Die Lösungsfunktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(t)$  mit den Parametern  $\lambda_n$  sind die Eigenfunktionen des Problems. Man erhält z. B. Lösungen folgender Form:

$$f_1(x) = A_n \cdot \sin \sqrt{\lambda_n} \cdot x \quad (3.6)$$

$$f_2(t) = B_n \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{c} t} \quad (3.7)$$

Da unendlich viele Eigenwerte des Problems auftreten können, ergibt sich die Lösung allgemein zu:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot B_n \cdot [\sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot x)] e^{-\frac{\lambda_n}{c} t} \quad (3.8)$$

Theoretisch kommen zwar unendlich viele Eigenwerte in Betracht, es genügt jedoch vielfach bei technischen Problemen die Berücksichtigung von einigen der niedrigsten Eigenwerte, um zu brauchbaren Ergebnissen zu kommen. Durch Differentiation von Gl. 3.8 läßt sich zeigen, daß die Lösung die Differentialgleichung erfüllt.

Auch bei partiellen Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen kann die Methode der Trennung der Veränderlichen angewendet werden.

Gl. 3.1 liefert uns somit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen 3.4 und 3.5, die mit dem elektronischen Analogrechner zu lösen sind.

Nach Durchführung der Zeit- und Amplitudentransformation erhalten wir gemäß den in Abschnitt 2 getroffenen Vereinbarungen:

$$\frac{1}{\alpha_{21}} \overline{f_1''(x)} + \lambda \frac{1}{\alpha_{01}} \overline{f_1(x)} = 0$$

oder

$$\overline{f_1''(x)} = -\lambda \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{01}} \overline{f_1(x)} \quad (3.9)$$

Im Bild 3.1 ist die zugehörige Rechenschaltung gezeigt:

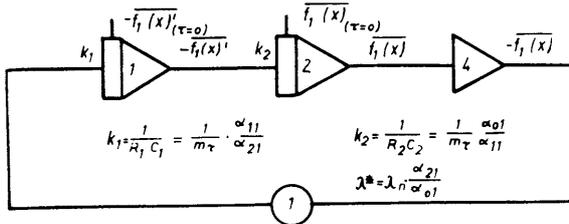


Bild 3.1

Von den Randbedingungen  $u(0, t)$  und  $u(1, t)$  der partiellen Differentialgleichung geht bei der Lösung mit dem elektronischen Analogrechner für  $x = \text{const.} = 0$   $u(0, 0)$  als Anfangsbedingung und  $u(1, 0)$  als Randbedingung in die Differentialgleichung 3.4 ein. Die Wahl der zweiten Anfangsbedingung  $u'(0, 0)$  ist beliebig. Sie muß nur ungleich 0 sein; ihre Größe hat keinen Einfluß auf die Bestimmung des Eigenwertes. Gesucht sind nunmehr die Werte  $\lambda_n$ , die auch die zweite Randbedingung erfüllen. Die Einstellung des Potentiometers 1 wird solange geändert, bis auch die zweite Randbedingung erfüllt ist. Aus den verschiedenen  $\lambda_n^*$ -Werten lassen sich bei vorgegebenen  $\alpha_{01}$  und  $\alpha_{21}$  die Werte  $\lambda_n$  ermitteln. Es ergeben sich in diesem Fall alle ganzzahligen Vielfachen des ersten  $\lambda$ -wertes. Der Analogrechner liefert gleichzeitig noch die Eigenfunktionen. Durch Versuch und Fehlerbetrachtung muß nunmehr diejenige Linearkombination der Eigenfunktionen gesucht werden, die die Funktion  $u(x, 0)$  am besten annähert. Wegen des symmetrischen Aufbaues der Funktion  $u(x, 0)$  (symmetrisch zu  $\frac{1}{2}$ ) kommen in diesem Fall nur die symmetrisch zu  $\frac{\pi}{2}$  liegenden Sinusfunktionen in Frage, also  $3 \lambda_1; 5 \lambda_1; 7 \lambda_1 \dots$ ; die Bestimmung der Amplituden der Eigenfunktionen ist relativ umständlich, da für n-Werte auch n-Schaltungen entsprechend Bild 3.1 aufgebaut werden müssen.

Mit den ermittelten  $\lambda_n$ -Werten hat nunmehr die Lösung der Gleichung 3.5 auf dem elektronischen Analogrechner zu erfolgen. Nach Durchführung einer Zeit- und Amplitudentransformation erhalten wir:

$$\frac{1}{\alpha_{12}} \overline{f_2(t)'} = - \frac{\lambda_n}{c} \frac{1}{\alpha_{02}} \overline{f_2(t)}$$

oder (3.10)

$$\overline{f_2(t)'} = - \frac{\lambda_n}{c} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{02}} \overline{f_2(t)}$$

( $\alpha_{12}$  und  $\alpha_{02}$  sind Amplitudenmaßstabsfaktoren).

Für Gl. 3.10 ist im Bild 3.2 die Rechenschaltung aufgebaut. Als Lösungsfunktion erhalten wir exponentiell abnehmende Funktionen, wobei die Abnahme mit vom jeweiligen  $\lambda_n$ -Wert abhängt. Baut man für jeden  $\lambda_n$ -Wert eine Schaltung entsprechend Bild 3.2 auf, so sind wir in der Lage, die Lösung auf dem Analogrechner für jedes beliebige  $x$  als Funktion der Zeit  $t$  darzustellen. Die Genauigkeit hängt nur von der Anzahl der berücksichtigten  $\lambda$ -Werte, d.h. der Güte der Funktionsannäherung  $u(x, 0)$  und der Genauigkeit der Rechenein-

heiten ab. Durch Hinzunahme weiterer Einheiten kann die Genauigkeit beliebig erhöht werden. Praktisch beschränkt die Ungenauigkeit der Recheneinheiten die erzielbare Genauigkeit.

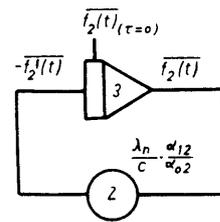


Bild 3.2

Da wir sowohl die  $x$ -Abhängigkeit als auch die  $t$ -Abhängigkeit auf dem gleichen elektronischen Analogrechner darstellen, können wir stets nur die  $x$ -Abhängigkeit für konstantes  $t$  oder die  $t$ -Abhängigkeit für konstantes  $x$  zur Darstellung bringen. Man geht praktisch so vor, daß man die Rechenkreise I so lange rechnen läßt bis der gewünschte  $x$ -Wert erreicht ist und fixiert durch den Schalter A diesen Zustand  $\overline{f(x)}$ ; (Bild 3.3). Anschließend wird der Schalter B geschlossen und die Multiplikation durchgeführt. Am Ausgang des Summierers erscheint dann eine der Lösungsfunktion  $u$  proportionale Spannung für  $x = \text{const.}$  als Funktion der Zeit. Läßt man zuerst den Rechenkreis II arbeiten und hält den Rechenprozeß bei einem bestimmten Zeitwert an, so erhält man nach der Betätigung von Schalter A am Ausgang des Summierers eine zu  $u$  proportionale Spannung für  $t = \text{const.}$  als Funktion von  $x$ .

Für viele Aufgaben ist es von Vorteil, die Eigenwerte und Eigenfunktionen mittels Fourier-Analyse zu bestimmen. Die Bestimmung der Amplituden und Frequenzen der verschiedenen Sinusschwingungen rein rechnerisch oder mechanisch mit dem Harmonischen Analysator oder elektrisch mit dem elektronischen Analogrechner unter Verwendung eines allgemeinen Funktionsgenerators ist weniger umständlich und führt zu genaueren Ergebnissen als die Ermittlung der Amplituden durch Versuch und Fehlerbetrachtung. Der Lösungsgang der Aufgabe wäre zweckmäßig folgender:

1. Fourierdarstellung der Funktion  $u(x, 0)$ .
2. Aufbau der Rechenkreise  $I_n$  und  $II_n$  für die erhaltenen Eigenwerte entsprechend Bild 3.3.
3. Abschätzung des Fehlers bei Verwendung von n-Rechenkreisen.
4. Lösung der partiellen Differentialgleichung für  $t = \text{const.}$   $x$  beliebig oder  $x = \text{const.}$  und  $t$  beliebig.

Dieser Lösungsgang hat noch folgenden Vorteil: Anstelle der Rechenschaltungen  $I_n$  kann die in Bild 3.4 angegebene Rechenschaltung mit nur einem Verstärker zur Erzeugung einer Sinusschwingung vorgegebener Amplitude, Frequenz und Phase verwendet werden. Hierdurch werden bei n-Rechenkreisen insgesamt zwei n Verstärker eingespart. Bei vorgegebener und beschränkter Verstärkerzahl läßt sich hierdurch die Anzahl der verwendbaren Rechenkreise für die darzustellenden Eigenfunktionen verdoppeln. Für die Schaltung entsprechend Bild 3.4 ergibt sich bei Anschalten einer Gleichspannung  $e_1 = -U$  zur Zeit  $\tau = 0$  unter der Bedingung  $i_g \approx 0$  und bei Verwendung eines Gleichspannungsverstärkers mit sehr hohem Verstärkungsfaktor  $V$  ( $V \gg 10^4$ ) folgender Ausdruck für die Ausgangsspannung  $e_0$  als Funktion der Zeit

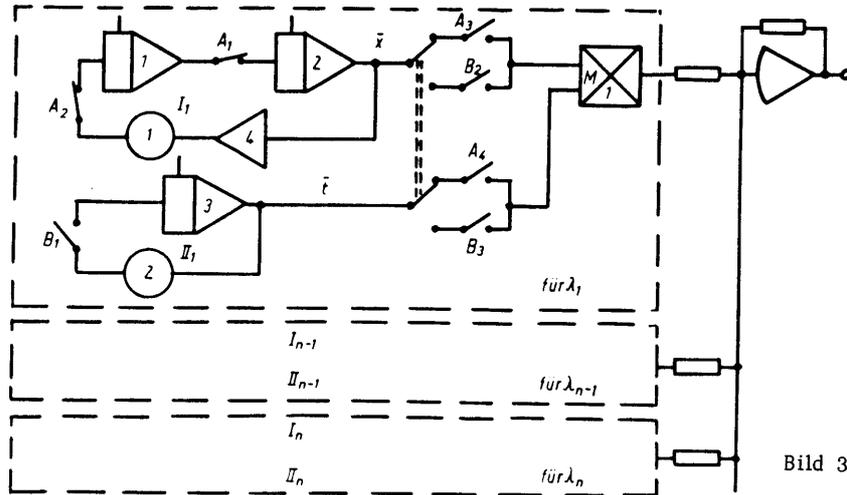


Bild 3.3

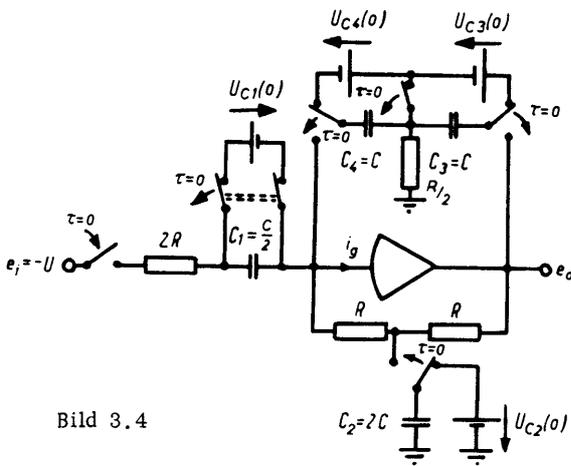


Bild 3.4

$$e_o = [U + U_{c1}(0) + 2(U_{c2}(0) + U_{c4}(0))] \sin \frac{1}{RC} t + [U_{c3}(0) + U_{c4}(0)] \cos \frac{1}{RC} t \quad (3.11)$$

Mit dieser Schaltung sind wir also in der Lage, Sinusfunktionen oder Cosinusfunktionen bestimmter Frequenz und Amplitude zu erzeugen. Die Frequenz  $\omega$  ist bestimmt durch die Wahl von  $R$  und  $C$ .

Es gilt:

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad (3/12)$$

Die Amplitude der Sinus- und Cosinusfunktion können wir durch die Größe der Gleichspannungen  $U$ ;  $U_{c1}(0)$ ;  $U_{c2}(0)$ ;  $U_{c3}(0)$  und  $U_{c4}(0)$  bestimmen.

Es ist zweckmäßig für die Amplitude der Sinusschwingung nur mit  $U$  und für die der Cosinusschwingung nur mit  $U_{c3}(0)$  zu arbeiten. Alle anderen Spannungsquellen mögen nicht vorhanden sein. Hierdurch benötigt man erstens nur zwei Spannungsquellen und zum anderen erhält man einfache Einstellmöglichkeiten für die Erzeugung beliebiger Amplituden und Phasen.

Durch die Anwendung des Überlagerungssatzes haben wir die Möglichkeit, eine komplizierte Aufgabe aus einfachen Teil-

aufgaben aufzubauen und die Einzellösungen zu überlagern. Eine Aufgabe mit beliebigen Anfangsbedingungen und unterschiedlichen aber konstanten Randbedingungen führen wir auf die folgenden Teilaufgaben zurück:

- a) Reines Anfangswertproblem; Randwerte Null.
- b) Reines Randwertproblem; Anfangsbedingung und zweiter Randwert Null.
- c) Reines Randwertproblem; Anfangsbedingung und erster Randwert Null.

Unter der Annahme, daß Lösungswerte erst ab Erreichen gewisser  $t$ -Werte interessant sind, ist es wünschenswert, eine Fehlerabschätzung bei Berücksichtigung einer endlichen Anzahl von Grundrecheneinheiten durchzuführen. Bei Verwendung von Quotientenkriterien ist in vielen Fällen eine Abschätzung der Teilsummen und der Fehler möglich. Der Zusammenhang zwischen Anzahl der Recheneinheiten und Genauigkeit führt im allgemeinen auf transzendente Gleichungen, deren Auswertung zweckmäßig in Tabellen oder graphisch erfolgt.

Die Methode der Trennung der Veränderlichen hat den großen Vorteil, daß man die Lösungsfunktionen z.B. für jeden beliebigen  $x$ - $y$ -Wert darstellen kann. Dies ist bei der im nächsten Abschnitt angegebenen Methode der Umformung partieller Differentialgleichungen mittels Differenzenquotienten in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen nicht möglich. Außerdem gestattet die Kombination der exakten Eigenwert- und Eigenfunktionsbestimmung mittels Fourieranalyse und der anschließende Aufbau der entsprechenden Rechenkreise, Fehlerabschätzungen durchzuführen und die Bestimmung der erforderlichen Anzahl von Rechenkreisen bei einer vorgegebenen oder gewünschten Genauigkeit.

#### 4. DIE UMFORMUNG PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MITTELS DIFFERENZENQUOTIENTEN

Die Umformung partieller Differentialgleichungen mittels Differenzenquotienten in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist die bei Analogrechnern fast ausschließlich angewandte Methode. Während man bei der Lösung partieller Differentialgleichungen in der numerischen Mathematik jeden

vorkommenden Differenzenquotienten ersetzt, läßt man bei der Lösung mit dem elektronischen Analogrechner stets noch Ableitungen nach einer unabhängigen Veränderlichen bestehen. Aus diesem Grunde sind die Abschätzmethoden der numerischen Mathematik nicht zu verwenden. Im weiteren werden vorzugsweise nur partielle Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen betrachtet. Bezeichnen wir diese mit  $x$  und  $y$ , so werden wir später derjenigen Veränderlichen die Maschinenzeit  $\tau$  zuordnen, die wir nicht durch Differenzenquotienten ersetzen.

Beim Differenzenverfahren teilt man ein vorgegebenes Intervall  $(a, b)$ , in welchem die Lösung gesucht wird, in  $n$  äquidistante Abschnitte  $\Delta x$  ein.  $\Delta x$  wird die Maschenweite oder Schrittweite genannt und auch mit  $h$  bezeichnet.

Beim Differenzenverfahren werden jetzt Bestimmungsgleichungen für die Näherungswerte  $Y_i$  an der Stelle  $x_i = a + i \Delta x$  aufgestellt.

Hierzu werden in den Differentialgleichungen für diskrete  $y_i$  die Differentialquotienten durch einfache oder verbesserte Differenzenquotienten ersetzt.

Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten. Für den 1. und 2. Differentialquotienten gilt z. B.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + 2 \Delta x) - 2y(x + \Delta x) + y(x)}{(\Delta x)^2} \quad (4.2)$$

Die Teilung der  $x$ -Achse in äquidistante Abschnitte ist nicht erforderlich, im allgemeinen aber zweckmäßig. Ändert sich die Abschnittsweite von Punkt zu Punkt, so muß der Wahl des Differenzenquotienten besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Bei der Darstellung des Differentialquotienten in Gl. 4.1 und 4.2 wurde der Differentialquotient an der Stelle  $x$  durch Funktionswerte an der Stelle  $x$ ,  $x + \Delta x$  u.  $x + 2 \Delta x$  ausgedrückt. Derartige Differenzenquotienten bezeichnet man üblicherweise als vorwärtsgenommene oder vordere Differenzenquotienten. Würde man z. B. die Stellen  $x + \Delta x$ ;  $x \pm \frac{\Delta x}{2}$  und  $x - \Delta x$  zur Bildung des Differenzenquotienten heranziehen, so erhält man den zentralen Differenzenquotienten. Der Differenzenquotient, der sich bei Verwendung der Stellen  $x$ ,  $x - \Delta x$  und  $x - 2 \Delta x$  ergibt, wird entsprechend mit rückwärtsgenommener oder rückwärtiger Differenzenquotient bezeichnet.

Für hinreichend kleines  $\Delta x$  wird die Annahme als berechtigt angesehen, daß die mittels Differenzenquotienten ermittelte Lösung eine brauchbare Näherung der partiellen Differentialgleichung darstellt. Eine Verkleinerung der Intervallbreite bedeutet beim Digitalrechner nur eine Vergrößerung der Rechenzeit. Beim elektronischen Analogrechner bedeutet jedoch z. B. eine Verdopplung der Anzahl der Abschnitte auch eine Verdopplung der Anzahl der Recheneinheiten. Aus diesem Grunde kommt den verbesserten Differenzenquotienten eine erhöhte Bedeutung zu.

Bei der Herleitung der einfachen und verbesserten Differenzenquotienten gehen wir aus von der Entwicklung einer Funktion  $y(x_0 + \Delta x)$  in eine Taylorreihe um den Punkt  $x_0$ . Es gilt:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{y''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta x)^n \quad (4.3)$$

Durch Auflösen nach  $y'(x_0)$  ergibt sich:

$$y'(x_0) = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} - \Delta x \left[ \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} \Delta x + \dots + \frac{y^{(n)}}{n!} (\Delta x)^{n-2} \right] \quad (4.4)$$

Ersetzt man also den Differentialquotienten  $\frac{dy}{dx} \Big|_{(x=x_0)} = y'$

an der Stelle  $x = x_0$  durch den sogenannten einfachen Differenzenquotienten  $\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$ , so machen wir

einen Fehler entsprechend der Größe der Summe sämtlicher vernachlässigter Glieder aus Gl. 4.4. Der Fehler wird mit kleiner werdendem  $\Delta x$  kleiner, aber die Konvergenz ist schlecht. Die Konvergenz würde wesentlich besser, wenn auch noch die zweite oder dritte Ableitung  $y''_0$  bzw.  $y'''_0$  in Gl. 4.4 durch Differenzenquotienten ersetzt würden. Dieser Weg wird bei der Herleitung verbesserter Ausdrücke für den Differenzenquotienten, sogenannte verbesserte Differenzenquotienten, besprochen.

Ausgehend von der Taylorentwicklung einer Funktion

$y_i = y(x_0 + i \Delta x)$  um den Punkt  $x_0$ :

$$y_i = y(x_0 + i \Delta x) = y_{(x=x_0)} + \sum_{n=1}^i \frac{(i \Delta x)^n}{n!} y^{(n)}_{(x=x_0)} \quad (4.5)$$

bilden wir eine Linearkombination der verschiedenen  $y_i$  mit geeigneten Koeffizienten  $a_i$ . Die Näherung wird umso besser, je mehr Punkte zur Darstellung des Differenzenquotienten herangezogen werden. Die Koeffizienten  $a_i$  werden nunmehr so bestimmt, daß möglichst viele der dem durch einen Differenzenquotienten zu ersetzenden Differentialquotienten folgenden höheren Ableitungen der Taylorentwicklung keinen Beitrag zum Differenzenquotienten ergeben.

Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung der am häufigsten gebrauchten Differenzenquotienten. Gleichzeitig ist der Ausdruck des nächsten nicht verschwindenden Gliedes der Taylorentwicklung mit angegeben. Umfangreichere Tabellen siehe [5].

Für jeden der Differenzenausdrücke entsprechend Tabelle 1 läßt sich ohne großen Aufwand die zugeordnete Rechen-schaltung angeben.

| Ableitung  | Differenzenausdruck   | Ausdruck des nächsten nichtverschwindenden Gliedes der Taylor-Entwicklung |
|------------|---|---|
| $y_0'$     | $\frac{1}{\Delta x} (y_1 - y_0)$  | $-\frac{\Delta x}{2} y_0''$   |
|            | $\frac{1}{2\Delta x} (y_1 - y_{-1})$  | $-\frac{(\Delta x)^2}{6} y_0'''$  |
|            | $\frac{1}{12\Delta x} (-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2})$                       | $\frac{(\Delta x)^4}{30} y_0^{(5)}$                                       |
|            | $\frac{1}{60\Delta x} (y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3})$     | $-\frac{(\Delta x)^6}{140} y_0^{(7)}$                                     |
|            | $\frac{1}{2\Delta x} (-3y_0 + 4y_1 - y_2)$                                    | $\frac{(\Delta x)^2}{3} y_0'''$   |
|            | $\frac{1}{6\Delta x} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3)$                          | $-\frac{(\Delta x)^3}{4} y_0^{(4)}$                                       |
|            | $\frac{1}{6\Delta x} (-2y_{-1} - 3y_0 + 6y_1 - y_2)$                          | $-\frac{5}{36} (\Delta x)^3 y_0^{(4)}$                                    |
|            | $\frac{1}{12\Delta x} (-3y_{-1} - 10y_0 + 18y_1 - 6y_2 + y_3)$                | $\frac{(\Delta x)^4}{20} y_0^{(5)}$                                       |
| $y_0''$    | $\frac{1}{(\Delta x)^2} (y_1 - 2y_0 + y_{-1})$                                | $-\frac{(\Delta x)^2}{12} y_0^{(4)}$                                      |
|            | $\frac{1}{12(\Delta x)^2} (-y_{-2} + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2})$      | $\frac{1}{90} (\Delta x)^4 y_0^{(6)}$                                     |
|            | $\frac{1}{(\Delta x)^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$                           | $\frac{11}{12} (\Delta x)^2 y_0^{(4)}$                                    |
|            | $\frac{1}{12(\Delta x)^2} (11y_{-1} - 20y_0 + 6y_1 + 4y_2 - y_3)$             | $\frac{(\Delta x)^3}{12} y_0^{(5)}$                                       |
| $y_0'''$   | $\frac{1}{2(\Delta x)^3} (+y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2})$                    | $-\frac{1}{4} (\Delta x)^2 y_0^{(5)}$                                     |
|            | $\frac{1}{8(\Delta x)^3} (-y_3 + 8y_2 - 13y_1 + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3})$ | $\frac{7}{120} (\Delta x)^4 y_0^{(7)}$                                    |
| $y_0^{IV}$ | $\frac{1}{(\Delta x)^4} (y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2})$               | $-\frac{1}{6} (\Delta x)^2 y_0^{(6)}$                                     |

Tabelle 1

Da auf das nach dem Einführen des Differenzenquotienten sich ergebende Differentialgleichungssystem im allgemeinen eine Zeit- und Amplitudentransformation angewendet werden muß, sind zur Dimensionierung der Schaltelemente stets die Maßstabsfaktoren erforderlich. Die Differenzenausdrücke nach Tabelle 1 werden normalerweise nicht erst in einem Summie-

rer gebildet und erst dann einem Integrator zugeführt, sondern man verwendet Summenintegrierer, um Verstärker zu sparen.

Um den grundlegenden Aufbau einer Rechenschaltung für eine partielle Differentialgleichung zu zeigen, sei eine Wärmeleitungsaufgabe betrachtet.

Das Verhalten der Wärmeleitung wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (4.6)$$

mit  $c = \frac{\rho c_1}{\kappa}$  beschrieben.

Die als örtlich und zeitlich unveränderlich angenommenen Konstanten haben folgende Bedeutung:

$\kappa$  = Wärmeleitfähigkeit

$\rho$  = Dichte

$c_1$  = spezifische Wärme

Die Größe  $U(x,t)$  stelle die Temperatur eines linearen Wärmeleiters, d.h. eines Stabes verschwindender Dicke oder auch eines veränderlichen Leiters dar, bei welchem die Temperatur nur von einer Raumkoordinate abhängt. Der uns interessierende Verlauf eines gegebenen Stabes bestimmter Länge  $0 < x < 1$  soll für die folgenden Anfangs- und Randbedingungen ermittelt werden:

- a) Anfangsbedingungen:  $U(x, +0) = U_0(x) = 100^\circ\text{C}$   
 b) Randbedingungen:  $U(+0, t) = A_0(t) = 0^\circ\text{C}$  für  $t > 0$   
 $U(1-0, t) = A_1(t) = 0^\circ\text{C}$  für  $t > 0$ .

Der Stab der Länge  $l = 6\text{ m}$  und mit einem  $C = 0,1\text{ s/m}^2$  möge am Anfang und Ende Kontakt mit Wärmespendern haben, die die Enden auf Temperaturen halten, die grundsätzlich mit der Zeit variieren dürfen. Wir nehmen zuerst den leicht überblickbaren Fall, daß diese Temperaturen am Anfang und Ende des Stabes konstant sein sollen.

Gesucht ist die Temperaturverteilung  $U(x,t)$  für  $t > 0$ .

Da wir von der Differenzenmethode Gebrauch machen wollen, ermitteln wir den Temperaturverlauf  $U(t)$  an diskreten Stellen  $i \cdot \Delta x$  mit z.B.  $\Delta x = 1\text{ m}$  und  $1 \leq i \leq 5$ .

Nach Einführung des einfachen Differenzenquotienten für  $\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$  ergibt sich für Gl. 4.6 der folgende allgemeine Ausdruck

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{(\Delta x)^2}$$

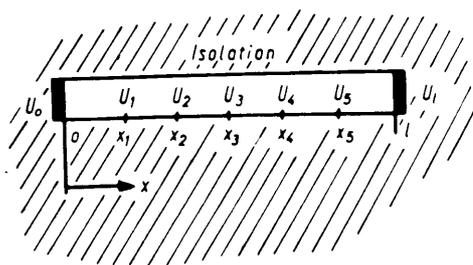


Bild 4.1

Durch die Aufteilung des Stabes in sechs Abschnitte entsprechend Bild 4.1 erhalten wir für die Punkte  $x_1 \div x_5$  das folgende System von Differentialgleichungen

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_2 - 2U_1 + U_0}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_3 - 2U_2 + U_1}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{dU_3}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_4 - 2U_3 + U_2}{(\Delta x)^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{dU_4}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_5 - 2U_4 + U_3}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{dU_5}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_6 - 2U_5 + U_4}{(\Delta x)^2}$$

Die Randbedingungen stellen die Temperaturen an den beiden Enden  $x=0$  und  $x=1$  dar. Dieses Gleichungssystem ist nunmehr auf dem elektronischen Analogrechner zu lösen. Da wir ein völlig symmetrisches System vor uns haben und  $U_0(t) = U_1(t) = 0^\circ\text{C}$  ist, vereinfacht sich der Schaltungsaufbau ganz erheblich. Es ist nämlich:

$$U_1(t) = U_5(t)$$

$$U_2(t) = U_4(t)$$

Es genügt also die Lösung dem folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_2 - 2U_1 + U_0}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{C} \frac{U_3 - 2U_2 + U_1}{(\Delta x)^2} \quad (4.8)$$

$$\frac{dU_3}{dt} = \frac{1}{C} \frac{2U_2 - 2U_3}{(\Delta x)^2}$$

Zum Entwurf der Rechenschaltung haben wir den Übergang zu den Maschinengrößen zu machen. Die Temperaturen an den verschiedenen Punkten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  werden durch Spannungen gegen Erde dargestellt.

Für die Zeit- und Amplitudentransformation soll gelten:

$$\tau = m \cdot t \quad (4.9)$$

$$\bar{U} = \alpha_0 U \quad (4.10)$$

$$\bar{U}' = \alpha_1 \frac{dU}{dt} \quad (4.11)$$

Damit ergibt sich aus Gl. 4.8

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 &= \frac{1}{C} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} (\bar{U}_2 - 2\bar{U}_1 + \bar{U}_0) \\ \bar{u}'_2 &= \frac{1}{C} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} (\bar{U}_3 - 2\bar{U}_2 + \bar{U}_1) \\ \bar{u}'_3 &= \frac{1}{C} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\bar{U}_2 - 2\bar{U}_3) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Amplitudenmaßstabsfaktoren bestimmen wir wie folgt: Da die Temperatur zur Zeit  $t = 0$  die höchstmögliche des Problems ist, ordnen wir dieser Temperatur die maximale Spannung des Analogrechners von 100 V zu.

Es soll also gelten:

$$\alpha_0 \leq \frac{\bar{U}_{\max}}{U_{\max}} = \frac{100 \text{ V}}{100 \text{ }^\circ\text{C}} \quad \text{gewählt} \quad \alpha_0 = 1 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}}$$

Wir versuchen  $\left| \frac{dU}{dt} \right|_{\max} = \frac{1}{c(\Delta x)^2} \cdot U_{\max}$  anzusetzen. Falls eine Übersteuerung erfolgen sollte, müssen wir den Maßstabsfaktor noch ändern. Es soll also gelten:

$$\alpha_1 \leq \frac{\bar{U}'_{\max}}{U'_{\max}} = \frac{100 \text{ V}}{\frac{1}{c(\Delta x)^2} \cdot 100 \text{ }^\circ\text{C}} = c(\Delta x)^2 \cdot 1 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}}$$

Mit diesen Maßstabsfaktoren kommt man vom Gleichungssystem 4.12 zu folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 &= \bar{u}_2 - 2\bar{u}_1 + \bar{u}_0 \\ \bar{u}'_2 &= \bar{u}_3 - 2\bar{u}_2 + \bar{u}_1 \\ \bar{u}'_3 &= 2\bar{u}_2 - 2\bar{u}_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Damit liegt die im Bild 4.2 dargestellte Rechenschaltung fest.

An dem symmetrischen Aufbau erkennt man sofort die Möglichkeit der Erweiterung durch Hinzunahme weiterer Punkte.

Entsprechend der angegebenen Programmierung gilt:

$$\bar{u} = \frac{1}{m\tau} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \int_0^\tau \bar{u}' d\tau + \bar{U}(\tau=0)$$

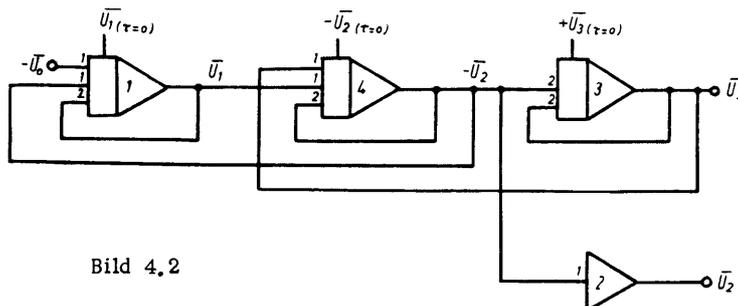


Bild 4.2

Für den einfachen Integrator entsprechend Bild 2.1 gilt

$$e_0 = -k \int_0^\tau e_i d\tau + E \quad \text{mit } k = \frac{1}{RC}$$

Damit ergibt sich  $e_0 = -\bar{U}$  für  $e_i = \bar{U}'$

falls

$$k = \frac{1}{RC} = \frac{1}{m\tau} \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$$

und

$$E = -\bar{U}(\tau=0) = -\alpha_0 U(t=0)$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich unter der Annahme  $m\tau = 10$  d.h.  $\tau = 10 t$ :

$$k = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}}}{0,1 \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 1 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}}} = 1 \text{ s}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad RC = 1 \text{ s}$$

Wir wählen  $C = 1 \mu\text{F}$  und  $R = 1 \text{ MOhm}$ .

Weiterhin ergibt sich:

$$E = -\alpha_0 U(t=0) = -1 \frac{\text{V}}{^\circ\text{C}} \cdot 100 \text{ }^\circ\text{C} = -100 \text{ V}$$

und  $\bar{U}_0 = 0$ , da  $U_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Damit liegt die Schaltung endgültig fest. Wir verwenden Summenintegrierer. Die vollständige Schaltung ist im Bild 4.3 dargestellt.

Die Lösungsfunktionen  $U$  für die konstanten  $x$ -Werte  $x_1 = x_5$ ;  $x_2 = x_4$  und  $x_3$  sind im Bild 4.4 dargestellt.

Die Schaltung für einen beliebigen Punkt ist in Bild 4.5 nochmals dargestellt. Diese Schaltung gilt für den einfachen zentralen Differenzenquotienten.

Gehen wir zum verbesserten Differenzenquotienten über, so gilt bei ganz entsprechender Wahl der Maßstabsfaktoren:

$$\bar{U}'_n = \frac{1}{12} (-\bar{U}_{n-2} + 16\bar{U}_{n-1} - 30\bar{U}_n + 16\bar{U}_{n+1} - \bar{U}_{n+2}) \quad (4.14)$$

Die zugehörige Rechenschaltung ist in Bild 4.6 dargestellt.

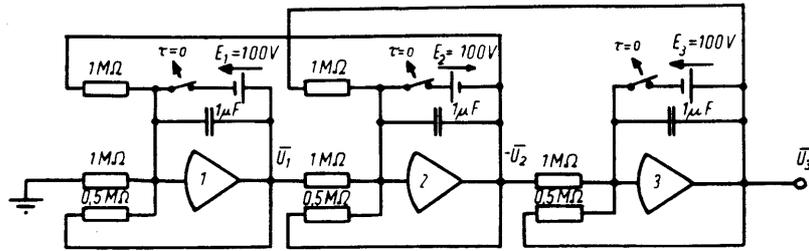


Bild 4.3

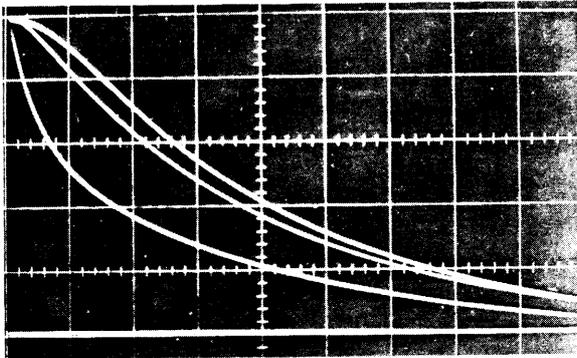


Bild 4.4

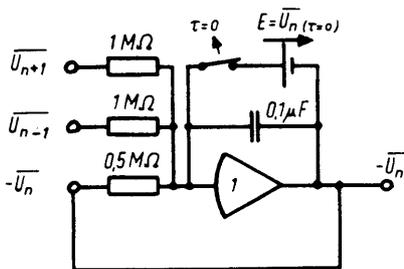


Bild 4.5

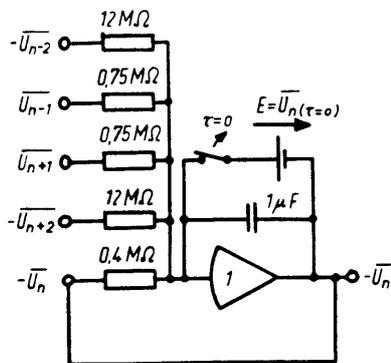


Bild 4.6

Wie die für beide Näherungen auf dem elektronischen Analogrechner erzielten Lösungsfunktionen zeigen, stimmen die erhaltenen Lösungen sehr gut überein. Der maximale Fehler liegt im Bereich  $t < 0,1$  s und beträgt bis zu 3%. Für Zeiten  $t > 0,1$  s liegt der Unterschied zwischen beiden Näherungslösungen unter 1%. Der Fehler ist für den Punkt  $x_1$  am größten. Der Unterschied zwischen den Lösungen mittels einfachen und verbesserten Differenzenquotienten wird aber wesentlich größer, wenn die Funktion  $u(x, t = 0)$  (d. h. die Anfangsbedingungen), nicht konstant ist, sondern sich mit dem Ort ändert, wenn z. B.  $U_2 = -U_1$ ;  $U_3 = U_1$ ;  $U_4 = -U_1$  und  $U_5 = U_1$  ist. Hier treten bei einfachen Differenzenquotienten Fehler bis zu 10% auf.

### 5. ABSCHÄTZUNG DES FEHLERS

Für viele mit der Methode der Trennung der Veränderlichen lösbare Aufgaben läßt sich bei Anwendung des Quotientenkriteriums eine Abschätzung der Teilsummen und der Fehler bei Berücksichtigung einer begrenzten Anzahl von Recheneinheiten durchführen. Für die zweite Methode der Lösung partieller Differentialgleichungen mittels Differenzenquotient ergeben sich leider nicht derartige Abschätzverfahren, obwohl die Methode selbst übersichtlicher und anschaulicher ist und fast ausschließlich angewendet wird. Die Fehler beim Rechnen mit einfachen und verbesserten Differenzenquotienten sind darin begründet, daß man alle höheren Ableitungen der Taylor-Entwicklung von einem bestimmten Wert an nicht mehr berücksichtigt. Daher kommt es, daß Fehlerabschätzungen nicht allgemein gültig sind, sondern bei Variation von Anfangs- und Randbedingungen neu untersucht werden müssen. Je nach Art des verwendeten Differenzenquotienten beginnen die ersten nicht berücksichtigten Glieder mit  $(\Delta x)^2$  oder höheren Potenzen von  $\Delta x$ . Die Vernachlässigung ist umso eher zulässig, je höher die Potenz von  $\Delta x$  und je kleiner  $\Delta x$  ist.

Bei der iterativen Fehlerabschätzung verkleinert man  $\Delta x$  solange, bis eine weitere Unterteilung in  $x$ -Richtung auf die Lösung keinen nennenswerten Einfluß mehr hat. Vielfach lohnt dieser Weg nicht, da erstens der Aufwand in keinem Verhältnis zur Verbesserung der Lösung steht und zweitens die doch stets vorhandenen Ungenauigkeiten der Rechenkomponenten diese Verbesserung wieder zunichte machen. Eine Möglichkeit zur überschlägigen Abschätzung der Restglieder besteht darin, daß man sich durch graphische Differentiation, z. B. mit dem Derivimeter, die höheren Ableitungen beschafft.

Die in [10] dargestellte Methode der  $h^2$ -Extrapolation führt zu brauchbaren Ergebnissen bei nicht zu großem Aufwand. Hat man bei Verwendung eines einfachen Differenzenquotienten eine Näherungslösung  $y(x)$  erhalten, so wird der Fehler weitgehend durch das erste nicht berücksichtigte Glied der Taylorentwicklung verursacht. Dies ist in vielen Fällen von  $(\Delta x)^2$  abhängig.

Unter der Annahme, daß

$$Y(x, \Delta x) = f(x) + (\Delta x)^2 f_1(x) \tag{5.1}$$

eine gute Näherung darstellt, kann man durch eine geeignete Kombination zweier Näherungslösungen  $Y_1(x, \Delta x_1)$  und  $Y_2(x, \Delta x_2)$  die Fehlerfunktion  $f_1(x)$  eliminieren.

Aus

$$Y_1(x, \Delta x_1) = f(x) + (\Delta x_1)^2 \cdot f_1(x)$$

und

$$Y_2(x, \Delta x_2) = f(x) + (\Delta x_2)^2 \cdot f_1(x)$$

erhält man

$$f(x) = \frac{(\Delta x_2)^2 \cdot Y_1(x, \Delta x_1) - (\Delta x_1)^2 \cdot Y_2(x, \Delta x_2)}{(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2} \quad (5.2)$$

$$f(x) = \frac{Y_1 \Delta x_2^2 \Delta x_3^2 [\Delta x_2 - \Delta x_3] - Y_2 \Delta x_1^2 \Delta x_3^2 [\Delta x_1 - \Delta x_3] + Y_3 \Delta x_1^2 \Delta x_2^2 [\Delta x_1 - \Delta x_2]}{\Delta x_2^2 \Delta x_3^2 [\Delta x_2 - \Delta x_3] - \Delta x_1^2 \Delta x_3^2 [\Delta x_1 - \Delta x_3] + \Delta x_1^2 \Delta x_2^2 [\Delta x_1 - \Delta x_2]} \quad (5.7)$$

Diese Extrapolation läßt sich mit geringem Schaltungsaufwand auf dem elektronischen Analogrechner durchführen. Der größte Aufwand steckt im Aufbau der zwei Rechenkreise mit unterschiedlicher Schrittweite  $\Delta x$ . Man kann sich aber auch so helfen, daß man die erste Näherungslösung von einem x-y-Schreiber aufzeichnen läßt und diese Funktion später über einen Funktionsgeneratorzusatz abtasten läßt. Dadurch ist der erforderliche Verstärkeraufwand nur durch die kleinste Schrittweite  $\Delta x$  bestimmt. Die Multiplikation der zwei Näherungslösungen  $Y_1(x, \Delta x_1)$  und  $Y_2(x, \Delta x_2)$  bei gleichzeitiger Addition wird im Summierer entsprechend Bild 5.1 durchgeführt.

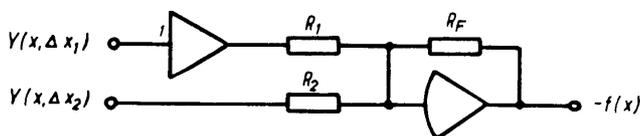


Bild 5.1

Für die Dimensionierung der Schaltelemente muß gelten:

$$1. \quad \frac{R_F}{R_1} = \frac{(\Delta x_2)^2}{(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2} \quad (5.3)$$

$$2. \quad \frac{R_F}{R_2} = \frac{(\Delta x_1)^2}{(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2} \quad (5.4)$$

Hat die Extrapolation aus zwei Näherungslösungen noch kein befriedigendes Ergebnis gezeigt, so muß man  $\Delta x$  noch weiter verkleinern. Entsprechend der iterativen Fehlerabschätzung wird man im allgemeinen zu genaueren Lösungsfunktionen kommen.

Nehmen wir an, daß die Lösungsfunktion allgemein in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$Y(x, \Delta x) = f(x) + (\Delta x)^2 f_1(x) + (\Delta x)^3 f_2(x) \quad (5.5)$$

so können wir aus einer Kombination von drei Lösungen für  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  und  $\Delta x_3$  aus

$$Y_1(x, \Delta x_1) = f(x) + (\Delta x_1)^2 \cdot f_1(x) + (\Delta x_1)^3 \cdot f_2(x)$$

$$Y_2(x, \Delta x_2) = f(x) + (\Delta x_2)^2 \cdot f_1(x) + (\Delta x_2)^3 \cdot f_2(x) \quad (5.6)$$

$$Y_3(x, \Delta x_3) = f(x) + (\Delta x_3)^2 \cdot f_1(x) + (\Delta x_3)^3 \cdot f_2(x)$$

die Fehlerfunktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  eliminieren. Nach entsprechenden Umformungen erhält man:

Für den häufig angewandten Sonderfall, daß

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{2} \quad \text{und} \quad \Delta x_3 = \frac{\Delta x_1}{3}$$

ist, erhält man

$$f(x) = \frac{1}{12} (Y_1 - 16 Y_2 + 27 Y_3) \quad (5.8)$$

Die Multiplikation der drei Näherungslösungen  $Y_1$ ,  $Y_2$  und  $Y_3$  bei gleichzeitiger Addition entsprechend Gl. 5.8 wird im Summierer entsprechend Bild 5.2 durchgeführt.

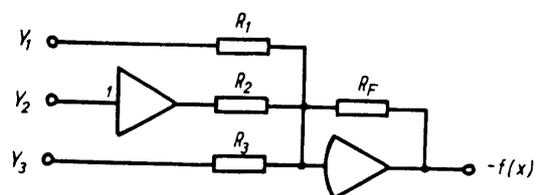


Bild 5.2

Für die Dimensionierung der Schaltelemente muß gelten:

$$\frac{R_F}{R_1} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{R_F}{R_2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{R_F}{R_3} = \frac{9}{4}$$

Der Sonderfall  $\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{2}$  und  $\Delta x_3 = \frac{\Delta x_1}{4}$  liefert

$$f(x) = \frac{1}{21} Y_1 - \frac{12}{21} Y_2 + \frac{11}{21} Y_3 \quad (5.9)$$

Bei Verwendung des zentralen Differenzenquotienten für die erste Ableitung:

$$y'_0 = \frac{1}{2 \Delta x} (y_1 - y_{-1}) - \frac{(\Delta x)^2}{3!} y''_0 - \frac{(\Delta x)^4}{5!} y''''_0 \quad (5.10)$$

würden bei der Extrapolation aus zwei Näherungslösungen erst Glieder ab der 5. Ordnung eine Rolle spielen. Die Berücksichtigung einer dritten Rechnung ergibt eine Näherung, bei der erst Glieder von der 7. Ableitung an Fehler verursachen können.

Ganz entsprechend läßt sich die Extrapolation aus zwei oder drei Näherungslösungen zum Erhalt einer genaueren Lösung bei Verwendung verbesserter Differenzenquotienten anwenden und führt selbstverständlich zu Ergebnissen, bei denen erst entsprechend höhere Ableitungen einen Fehlerbeitrag liefern.

Diese Methode der Extrapolation aus verschiedenen Näherungslösungen hat den Vorteil, daß man erstens entsprechend der iterativen Fehlerabschätzung den Einfluß der kleineren Schrittweiten verfolgen kann und zweitens durch eine Kombination dieser so erhaltenen Näherungslösungen Lösungen erhalten kann, bei denen der Einfluß der normalerweise bei den Einzelösungen vernachlässigten höheren Ableitungen ganz erheblich herabgesetzt wird.

## 6. VERSCHIEDENE DARSTELLUNGSMÖGLICHKEITEN DER LÖSUNGSFUNKTIONEN

Je nach dem Aufgabengebiet und der späteren Verwendung der Lösungsfunktionen sind verschiedene Darstellungen wünschenswert. Bei der Lösungsmethode mittels der Trennung der Veränderlichen war es möglich, eine Rechenschaltung anzugeben, die es erlaubte, für beliebige  $x$ -Werte die Lösung als Funktion von  $x$  darzustellen. Die Methode war allerdings beschränkt auf den Fall konstanter Randbedingungen. Da aber bei den meisten Problemen nichtkonstante Randbedingungen vorliegen,

scheidet dieses Verfahren aus. Die größte Bedeutung kommt also der Umformung partieller Differentialgleichungen mittels Differenzenquotienten (einfache oder verbesserte) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu. Da nunmehr die unabhängige Veränderliche allein noch die Maschinenzeit  $\tau$  ist, erhalten wir also grundsätzlich nur Lösungsfunktionen als Funktionen der Zeit. Für Aufgaben der Wärmetechnik, Kristallographie usw. ist es wünschenswert, zusätzlich andere Darstellungsarten zur Verfügung zu haben. Hierzu gehören z. B. die Registrierungen der Lösungen als Funktionen des Ortes mit der Zeit als Parameter oder Höhenschichtliniendarstellungen. Wie im weiteren gezeigt wird, sind auch derartige Lösungsscharen direkt mit dem elektronischen Analogrechner zu erzeugen.

### 6.1 Darstellung von Lösungsfunktionen

$$\bar{y} = f(t); x_1 \dots x_n = \text{Parameter}$$

An dem in Abschnitt 4 durchgeführtem Beispiel der Wärmeleitungsaufgabe erhielten wir nach Einführung der Differenzenquotienten ein System von Differentialgleichungen. Mit geeigneten Maßstabsfaktoren kommt man zu den Maschinengleichungen und zur Rechenschaltung Bild 4.2. An den Ausgängen der Verstärker erhält man sofort die den entsprechenden Temperaturen proportionalen Spannungen. Für Registrierungen des Verlaufs der Temperatur als Funktion der Zeit für die verschiedenen Punkte ist die Rechenschaltung vollständig. Wir registrieren nacheinander mit einem Einzelschreiber oder gleichzeitig mit einem Mehrfachschreiber die Lösungsfunktionen, wobei die Ablenkung in horizontaler Richtung proportional mit der Zeit zu erfolgen hat. Im Bild 6.1 ist die großformatige Darstellung (DIN A 3) von einem  $x$ - $y$ -Schreiber für eine Unterteilung in zehn Abschnitte aufgezeichnet. Diese Darstellung ergibt gegenüber der mit dem Elektronenstrahloszillographen geringere Ablesefehler.

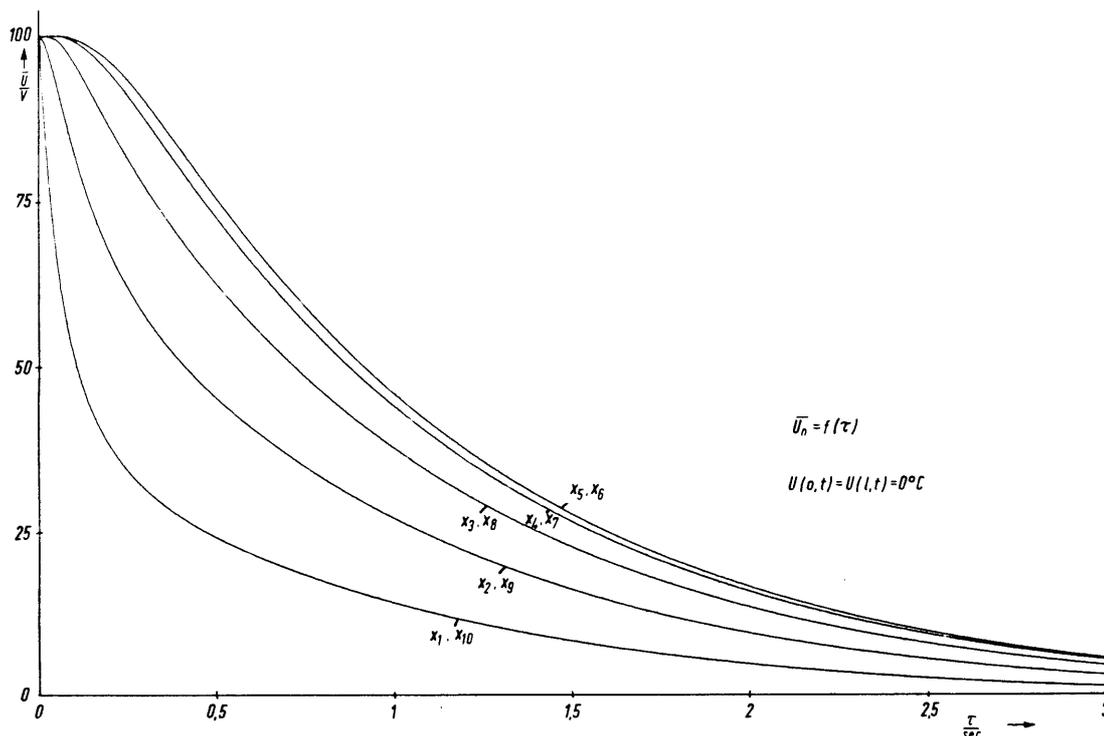


Bild 6.1

6.2 Darstellung von Lösungsfunktionen

$$\bar{y} = f(x); t_1 \dots t_n = \text{Parameter}$$

Es soll jetzt eine andere Darstellungsmethode aufgezeigt werden. Gerade bei Aufgaben der Wärmetechnik ist es wünschenswert, wenn man nicht die Darstellung  $u(x, t) = u(t)$  für  $x = \text{const.}$ , sondern die Darstellung  $u(x, t) = u(x)$  für  $t = \text{const.}$  sofort vorliegen hat oder auf dem Schirm des Oszillographen beobachten und photographisch registrieren kann. Diese Darstellungen werden in dem Beispiel der Wärmetechnik zur Beurteilung von auftretenden Wärmespannungen benutzt. Bei diesen Problemen werden im allgemeinen bei

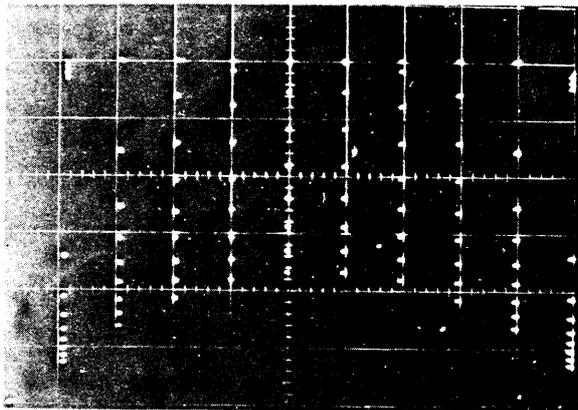


Bild 6.2

y-Ablenkplattenpaar schaltet man über einen Stufenschalter den jeweiligen Verstärkerausgang  $\bar{u}_n$ . In der einfachsten Form nimmt man einen Drehwähler mit mehreren Kontaktbahnen. Im Bild 6.3 ist die Schaltungsanordnung dargestellt.

Jeder Verstärker liefert die bereits angegebenen Lösungskurven  $u(x, t) = u(t)$  für  $x = \text{const.}$  entsprechend Bild 6.1 Diese Lösungsfunktionen ergeben auf dem x-y-Schreiber vertikale Linien mit nicht konstanter Schreibgeschwindigkeit. Der Elektronenstrahl wird dunkel gesteuert und nur für kurze Augenblicke in konstanten Zeitabständen hellgetastet. Im Blockschaltbild 6.4 ist der insgesamt erforderliche Aufwand für die zusätzliche Umtasteinrichtung zu ersehen.

6.3 Lineare Interpolation zwischen benachbarten Funktionswerten

Wünschenswert ist natürlich ein geschlossener Linienzug. Aufgaben, deren Lösungen als Funktion der Zeit keine monoton abfallenden Funktionen ergeben, sind mit dieser Darstellung allein nicht sicher auszuwerten. Es sind stets die Ergebnisse entsprechend dem Bild 6.1 hinzuzuziehen. Dieser Umstand macht es erforderlich, die Schaltung Bild 6.4 dahingehend zu erweitern, daß vom x-y-Oszillographen auch die Verbindungslinien zugehöriger Punkte mit aufgezeichnet werden. Im Bild 6.5 ist für einen bestimmten Wert t ein geschlossener Linienzug gezeigt.

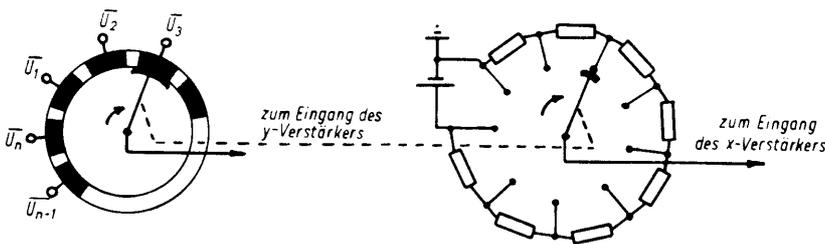


Bild 6.3

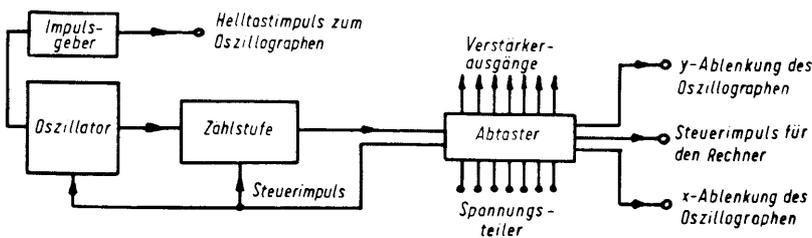


Bild 6.4

Die Grundelemente der Umtasteinrichtung sind ein Oszillator, eine Zahlstufe, ein Abtaster und ein Hellstastimpulsgeber.

Erreichen bestimmter Grenzwerte die Randbedingungen geändert. Man kann die Anlage sofort dahingehend erweitern, daß beim Überschreiten zulässiger Wärmespannungen ein Regelvorgang ausgelöst wird, der die Temperaturänderungen in der Zeiteinheit auf ein zulässiges Maß begrenzt.

Im Bild 6.2 sind punktweise die Lösungswerte  $u(x, t)$  für  $t = \text{const.}$  dargestellt. Diese Aufnahme wurde von einem x-y-Oszillographen aufgenommen, der über eine Hellstastschaltung gesteuert wurde. Der Analogrechner selbst arbeitet im repetierenden Betrieb. Durch Hinzunahme weiterer Punkte ist natürlich ein wesentlich dichteres Punktnetz zu erhalten.

Beim x-y-Oszillographen ist jedem Punkt  $x_n$  des Problems eine bestimmte Auslenkung in x-Richtung zugeordnet. An das

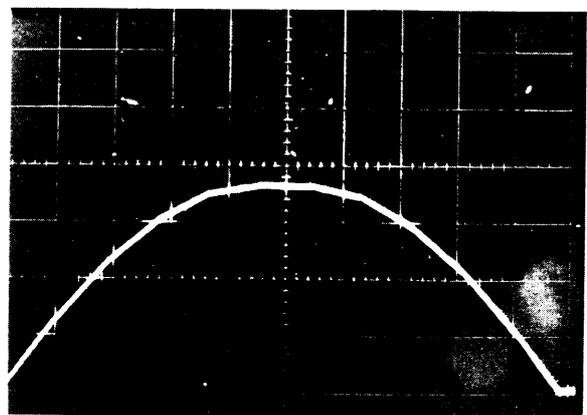


Bild 6.5

Die Bilder 6.6, 6.7 und 6.8 stellen den Temperaturverlauf längs eines Stabes für verschiedene Zeiten dar. Eine derartige Darstellung ist in jedem Fall übersichtlicher und der Vorstellung des Ingenieurs vertrauter als die Darstellung der Funktion  $u(x, t) = u(t)$  für  $x = \text{const}$ . Der entscheidende Vorteil ist, daß der Einfluß von Anfangs- und Randbedingungen auf dem Bildschirm der Oszillographenröhre beobachtet werden kann. Eine Möglichkeit, einen geschlossenen Linienzug zu erhalten, besteht darin, daß man sämtliche interessierenden Verstärkerausgänge an ein relativ schnell durchdrehbares Potentiometer anschließt. Entweder muß der Rechenvorgang derartig langsam ablaufen, daß ein vollständiger Umlauf des Potentiometerabgriffes in einer Zeit beendet ist, in der sich der Funktionswert noch nicht nennenswert geändert hat oder man hält nach einer gewünschten Zeit den Rechenvorgang an, läßt das Potentiometer einmal umlaufen und anschließend wieder die Zeit  $\Delta \tau$  weiterrechnen. Liefert eine zweite Kontaktbahn des Potentiometers eine dem Drehwinkel proportionale Ablenk-

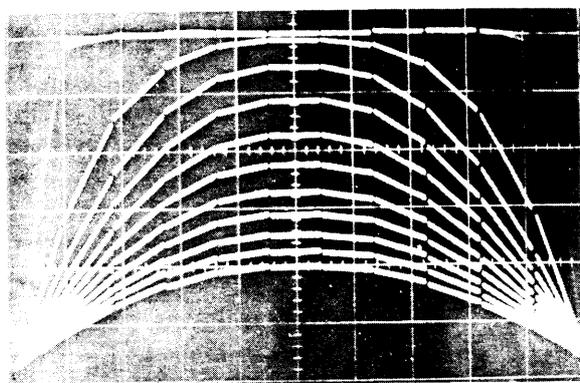


Bild 6.6

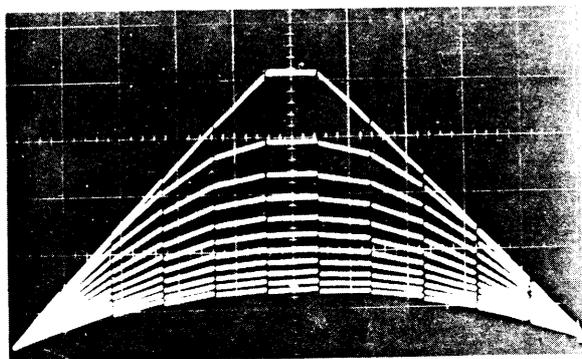


Bild 6.7

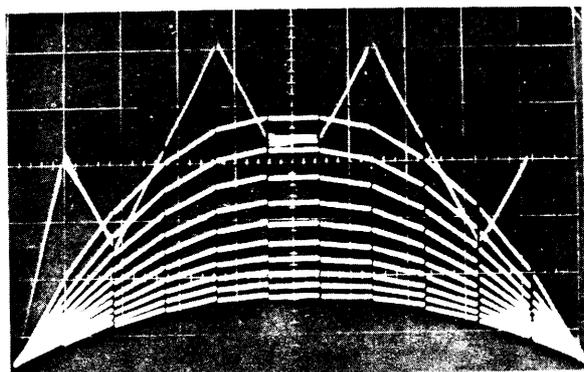


Bild 6.8

spannung an das Ablenkplattenpaar für die Horizontalablenkung, so erscheint bei einer Hellstastzeit von einem Umlauf des Potentiometerabgriffes ein geschlossener Linienzug auf dem x-y-Oszillographen.

Der Aufwand lohnt nur dort, wo dauernd Wärme- oder ähnliche Probleme gelöst werden müssen. Nach Möglichkeit ist die lineare Interpolation zwischen den benachbarten Funktionswerten mit den üblichen Recheneinheiten durchzuführen. Nach Bild 6.9 gilt:

$$\bar{U} = \bar{U}_n + \frac{\bar{U}_{n+1} - \bar{U}_n}{\bar{U}_a} \cdot \bar{d}\bar{u} \quad (6.1)$$

mit  $0 < \bar{d}\bar{u} < \bar{U}_a$ .

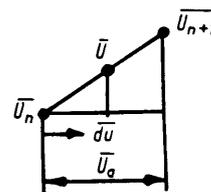


Bild 6.9

Gibt man die entsprechend Gl. 6.1 erzeugte Spannung  $\bar{U}$  auf das y-Ablenkplattenpaar und die z.B. sägezahnförmig verlaufende Spannung  $\bar{d}\bar{u}$  auf das x-Ablenkplattenpaar, so läuft der Elektronenstrahl stets zwischen den Werten  $\bar{U}_n$  und  $\bar{U}_{n+1}$  hin und her. Wird jetzt noch der Oszillograph in bestimmten konstanten Zeitabständen für die Dauer eines Hin- und Herlaufes von  $\bar{d}\bar{u}$  hellgetastet, so erhält man bei einem Durchlauf des Rechners eine Darstellung entsprechend Bild 6.10. Das vollständige Blockschaltbild für die Aufzeichnung der linear interpolierten Funktionsverläufe  $u(x, t) = u(x)$  für  $t = \text{const}$  ist im Bild 6.11 angegeben.



Bild 6.10

Die ausgeführte Schaltung ist im Bild 6.12 dargestellt. Eine quadratische Interpolation zwischen den drei benachbarten Funktionswerten ist ganz entsprechend mit einer geringfügigen Schaltungserweiterung möglich.

#### 6.4 Höenschichtliniendarstellung

Als weitere Darstellungsmöglichkeit ist speziell bei mehrdimensionalen Problemen die Höenschichtliniendarstellung von Interesse. Bei dieser Darstellung (Bild 6.13) kommt es darauf an, nur die Orte gleichen Funktionswertes darzustellen. Zur Darstellung genügt ein Kathodenstrahloszillograph mit der üblichen zeitproportionalen Ablenkung und der Möglichkeit einer Hellstastung. Jedem y-Wert wird eine bestimmte Auslenkung zugeordnet. Der Elektronenstrahl wird im allgemeinen dunkel gesteuert. Nur bei Vorhandensein eines bestimmten Spannungswertes wird ein Hellstastimpuls auf den Oszillo-

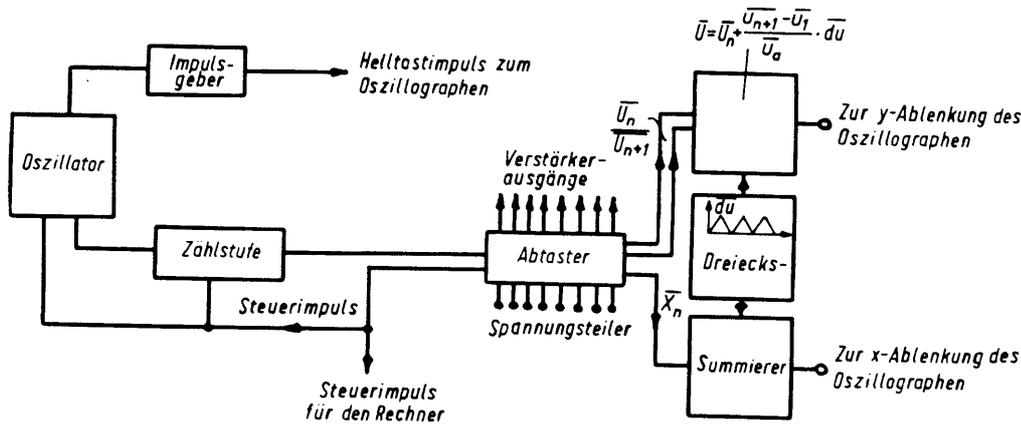


Bild 6.11

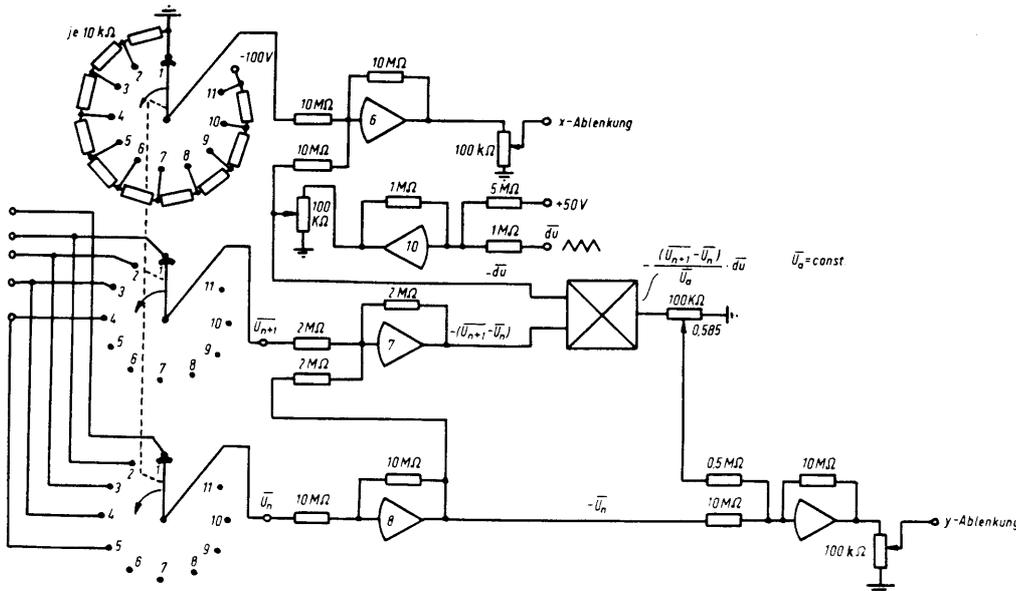


Bild 6.12

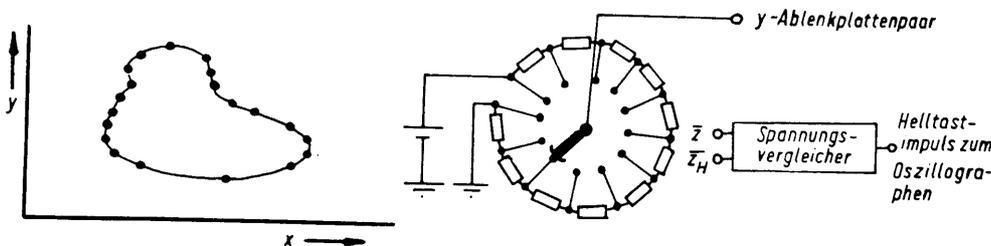


Bild 6.13

graphen gegeben. Ordnen wir dieser Spannung eine bestimmte Höhe zu, dann entspricht diesem vorher festgelegten Spannungswert eine Höhenschichtlinie, die sowohl punktwise als auch als Linienzug dargestellt werden kann. Von besonderer Bedeutung ist die Ansprechempfindlichkeit des im Bild 6.13 gezeigten Spannungsvergleichers. Gefordert wird die Abgabe eines Hellstastimpulses konstanter Größe in einem relativ eng tolerierten Spannungsbereich. Auf die Angabe der schaltungsmäßigen Realisierung sei hier verzichtet.

6.5 Darstellung von Lösungsfunktionen  $y = f(x)$  unter Zuhilfenahme eines Speicherelementes

Will man im langsamen Betrieb des Rechners registrieren und wegen einer höheren Genauigkeit ein gegenüber der Sichtfläche des Elektronenstrahloszillographen wesentlich größeres Format des Registrierpapiers, z.B. DIN A 3, verwenden, so

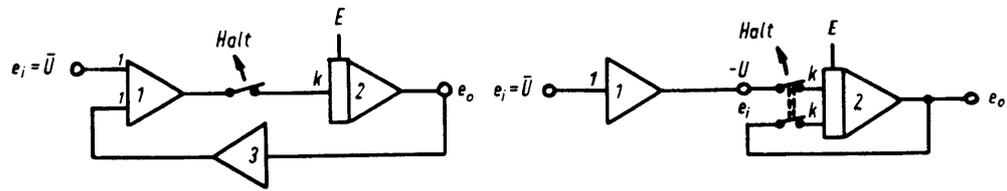
kann man auch hierfür die angegebenen Methoden in etwas abgeänderter Form einsetzen. Zweckmäßiger aber ist die Verwendung von Speicherelementen. Anstelle der linearen Interpolation unter Benutzung von Multiplikationseinheiten werden Speicherelemente in Verbindung mit einer Regelschaltung benutzt. Diese bewirkt nach einer Umschaltung auf andere Funktionswerte ein Nachlaufen auf diese neuen Funktionswerte (Nachlaufregelung). Die benutzten Rechenschaltungen sind im Bild 6.14 dargestellt.

Für beide Schaltungen ergibt sich bei Anlegen einer Gleichspannung  $e_i = U$

$$e_0 = U + (E - U) e^{-kt}$$

Unterbricht man mit dem Haltkontakt den Rechenkreis, so hält der Integrator seinen Spannungswert und wirkt somit als

Bild 6.14



Speicher. Wird nunmehr eine andere konstante Spannung auf den Eingang geschaltet, so strebt die Größe  $e_0$  dieser anderen konstanten Spannung zu, sobald der Kontakt geschlossen wird.

Die für die x- oder y-Ablenkung erforderlichen Regelkreise mit Speicherwirkung ergeben also folgende Zeitabhängigkeiten:

$$y = U_2 + (E_2 - U_2) \cdot e^{-k_2 t}$$

$$x = U_1 + (E_1 - U_1) \cdot e^{-k_1 t}$$

Entsprechend Bild 6.15 ergibt sich mit  $k_2 = k_1$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U_2 - E_2}{U_1 - E_1}$$

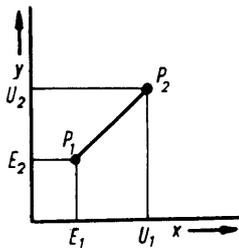


Bild 6.15

Hat der Rechner zu Beginn die x und y-Werte  $E_1$  und  $E_2$  des Punktes 1, so wird die Schreibfeder auf der Geraden zwischen  $P_1$  und  $P_2$  nach  $P_2$  wandern. Damit ist also die gewünschte Nachlaufabhängigkeit erreicht. Gehen wir davon aus, daß den

einzelnen Verstärkern entsprechend Bild 2.1 bestimmte Punkte  $x_1 \dots x_n$  zugeordnet sind, so wird man zur Registrierung der Funktionswerte als Funktion des Ortes für bestimmte Zeiten  $t = \text{const.}$  sämtliche Ausgänge der Verstärker an einen Drehwähler anschließen. Gleichzeitig schließen wir einen Spannungsteiler an eine zweite Kontaktbahn an. Damit erhält man an den Schleifern eine dem Ort x proportionale Spannung und den zugehörigen Funktionswert. Beide Spannungen werden auf eine entsprechend Bild 6.14 aufgebaute Regelschaltung und die Ausgänge der Regelschaltungen auf die x und y-Eingänge des x-y-Schreibers gegeben. Als Haltkontakt wird ein Kontakt der Umschalteneinrichtung benutzt. Der vollständige Registrierungsablauf geschieht wie folgt: Sind dem Rechner alle Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben, so läßt man diese eine bestimmte Zeit  $\Delta \tau$  rechnen. Zur Abtastung und Registrierung aller Funktionswerte dreht der Drehwähler selbsttätig durch. Die Drehgeschwindigkeit ist abhängig von der Regelkreis konstanten k. Wir verlangen, daß der Schleifer etwa  $t = \frac{5}{R}$  lang auf dem jeweiligen Kontakt verweilt. Nach einem Umlauf wird der Haltkontakt geöffnet und der Rechner rechnet wieder eine bestimmte Zeit weiter. Einem vollen Umlauf des Drehwählers entspricht dann die Aufzeichnung der Funktion  $y = f(x)$  für einen bestimmten Wert  $t = \text{const.}$  Die vollständige Schaltung ist in Bild 6.16 dargestellt.

Diese Schaltung hat den großen Vorteil, daß man mit geringem Aufwand zu den gewünschten Kurvenscharen kommen kann. Durch die großformatige Aufzeichnung und langsame Rechnung ist eine große Genauigkeit der Rechenergebnisse gewährleistet. Die Bilder 6.17 - 6.19 dienen der Anschaulichkeit dieser Aufzeichnungsart bei konstanten und variablen Anfangs- und Randbedingungen.

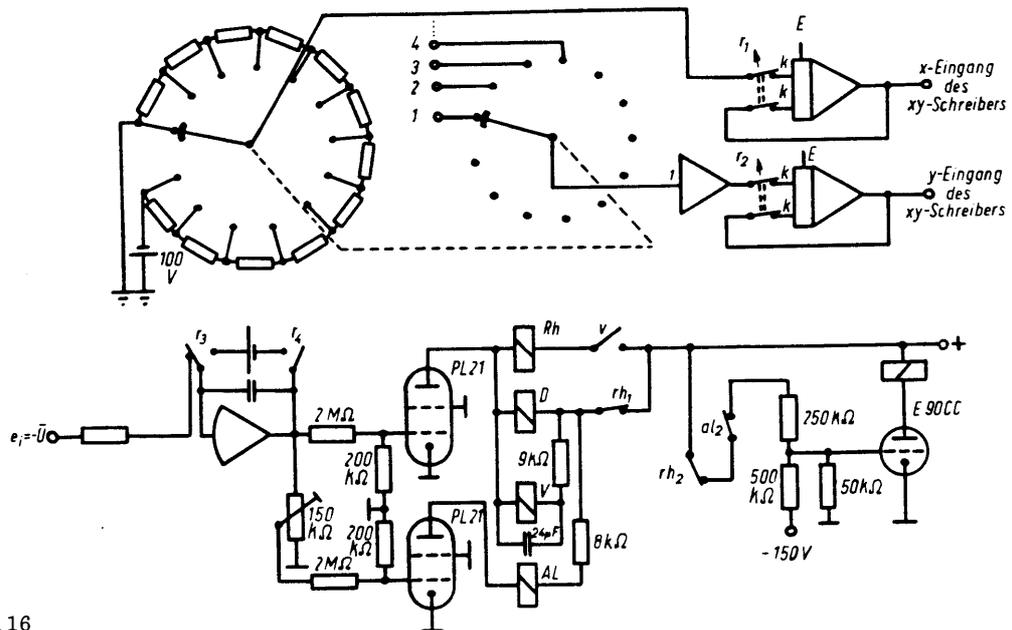


Bild 6.16

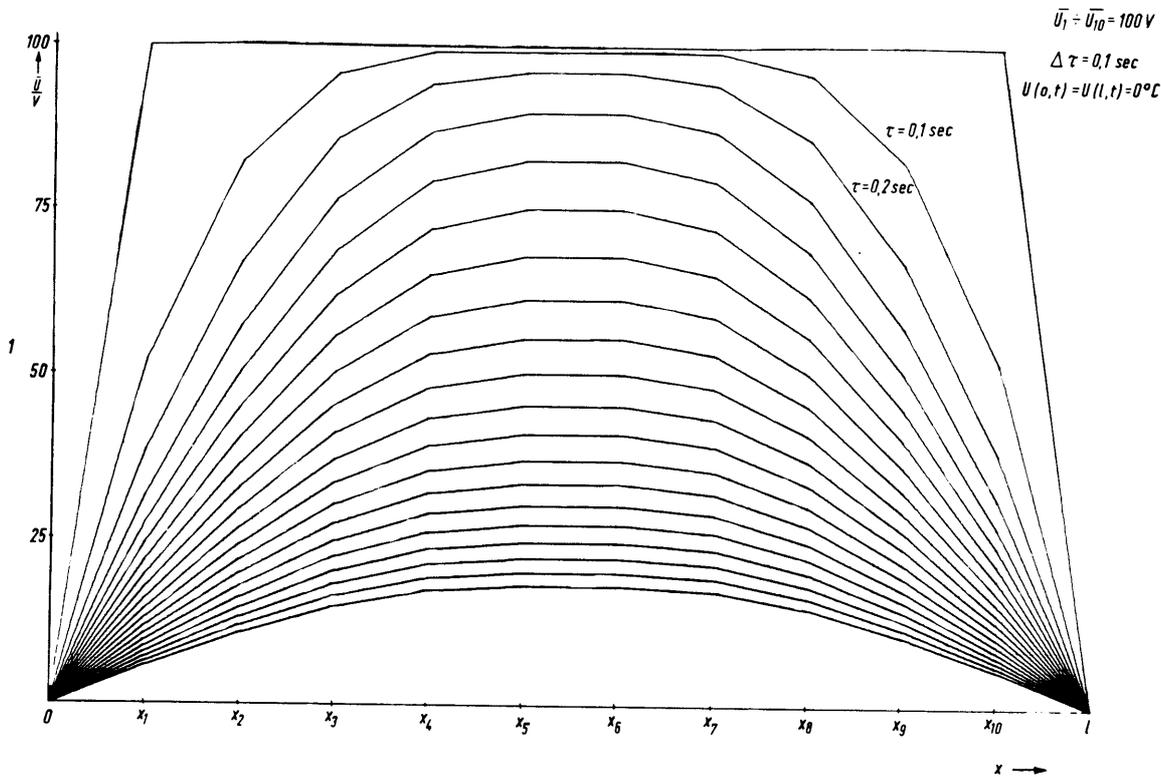


Bild 6.17

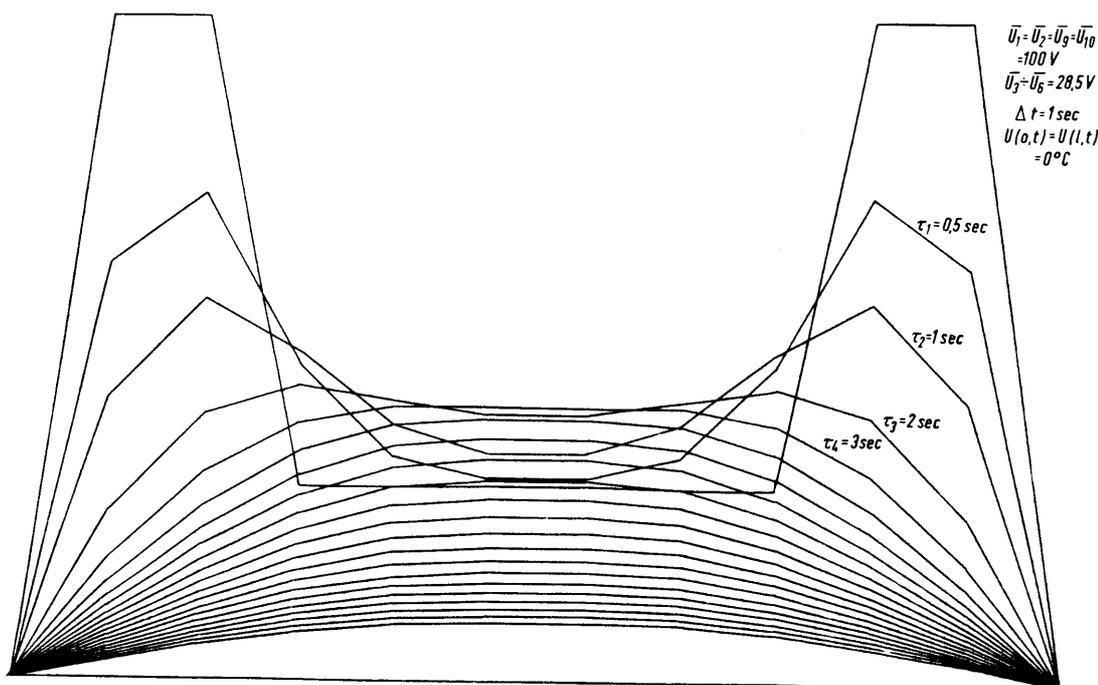


Bild 6.18

Die Auswertung der Funktionswerte ergab eine gute Übereinstimmung mit den rechnerisch ermittelten Funktionswerten.

## 7. ZUSAMMENFASSUNG

Nach einer kurzen Übersicht über den elektronischen Analogrechner und die angewandte Programmierung werden die verschiedenen Lösungsverfahren und Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen mit dem elektronischen Analogrechner behandelt. Für die nicht sehr häufig angewandte Methode der Trennung der Veränderlichen ergibt sich für reine Anfangswertprobleme und Anfangswertprob-

leme mit konstanten Randbedingungen die Möglichkeit, für jeden beliebigen  $x$ - $y$ -Wert die Lösungsfunktionen darzustellen. Fehlerabschätzungen erlauben die Ermittlung der erforderlichen Anzahl von Rechenkreisen bei einer gewünschten Genauigkeit. Für die Erzeugung von Sinusfunktionen weitgehend beliebiger Amplitude und Phase mit nur einem Verstärker ist die dort angegebene Rechenschaltung mit Vorteil zu verwenden.

Die zweite Methode der Umformung partieller Differentialgleichungen mittels Differenzenquotienten in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist die am häufigsten angewandte Methode. Zur Fehlerabschätzung wird allgemein

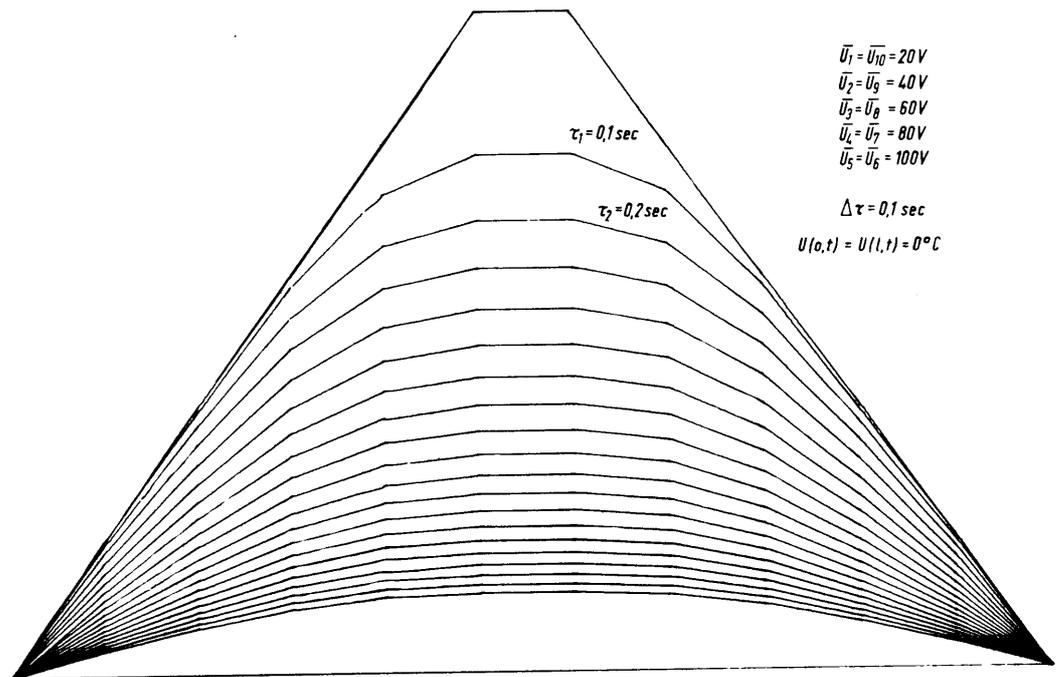


Bild 6.19

die iterative Fehlerabschätzungsmethode angewandt oder durch Vergleich mit bekannten exakt ermittelten Werten auf die Güte der erhaltenen Näherung geschlossen. Von größter Wichtigkeit ist die Einführung verbesserter Differenzenquotienten. Durch eine Extrapolation aus verschiedenen Näherungslösungen lassen sich Lösungsfunktionen ermitteln, die bei geeigneter Wahl von Gewichtungsfaktoren für die verschiedenen Lösungsfunktionen zu wesentlich verbesserten Lösungsfunktionen führen.

Weiterhin werden verschiedene Darstellungsmöglichkeiten der Lösungsfunktionen betrachtet und einige bisher unbekannte Möglichkeiten angegeben. Mit den angegebenen Schaltungen ist man in der Lage, Funktionsverläufe  $u = f(x)$  für  $t = \text{const.}$  zu erhalten. Diese sehr anschaulichen Darstellungen der Lösungsfunktionen sind sowohl bei beliebigen Anfangsbedingungen als auch für variable Randbedingungen einzusetzen und mit großem Vorteil zu verwenden. Für großformatige Darstellungen empfiehlt sich das vorgeschlagene Verfahren unter Verwendung von Speicherelementen. Die so gewonnenen Funktionsverläufe genügen hinsichtlich Genauigkeit den Anforderungen, haben aber außerdem den Vorteil größter Anschaulichkeit. Beide angegebenen Verfahren lassen sich ohne großen Mehraufwand am elektronischen Analogrechner durchführen.

#### Literatur:

- [1] C. L. Johnson: Analog computer techniques. McGraw Hill Book Co., New York 1956.
- [2] M. Korn und Th. Korn: Electronic analog computers. McGraw Hill Book Co., New York 1956.
- [3] G. W. Smith und R. C. Wood: Principles of Analog Computation. McGraw Hill Book Co., New York 1959.
- [4] A. S. Jackson: Analog Computation. McGraw Hill Book Co., New York 1960.
- [5] L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag 1955.
- [6] H. Herrmann: Analogie-Rechenmaschinen in "Handbuch der Automatisierungstechnik". Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik, Berlin 1959.
- [7] D. Ernst: Elektronische Analogrechner. R. Oldenbourg, München 1960.
- [8] G. Doetsch: Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser Verlag, Stuttgart/Basel 1958.
- [9] M. Robert Howe und Vincent S. Hanemann jr.: The Solution of Partial Differential Equations by Difference Methods using the Electronic Differential Analyzer. Proceedings of the I.R.E., 1953.
- [10] Josef Matyas: Modellieren einer Leitung mit verschiedenen Randbedingungen mit Hilfe eines Analogrechners. Archiv der Elektrischen Übertragung 1959.
- [11] G. George O'Brien, Morton A. Hyman und Sidney Kaplan: A Study of the Numerical Solution of Partial Differential Equations. Journal Mathem. and Physics, 1950.
- [12] R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy: Über die partiellen Differenzgleichungen der math. Physik. Mathematische Annalen, Bd. 100, 1928.

(Eingegangen am 19. 4. 1962)