

Die Differentialgleichung und ihre Lösung mit
dem Operationsverstärker
=====

Die in den nachstehenden Blättern L 1112, S. 1 bis S.8
gebrachten Ausführungen über die Lösung von Differential-
gleichungen mit dem Operationsverstärker sind einem Hand-
buch "Grundlagen der Schaltungstechnik von Operationsver-
stärkern" (Bestell Nr. 39511.1) nach einem Kurs der
"euro-instronics" entnommen.

Da diese Abhandlungen insbesondere dann sinnvoll sind,
wenn man mit Analog-Rechnern noch nicht viel gearbeitet
hat, sind sie in dieses Handbuch übernommen worden.

Es handelt sich nicht um eine Versuchsanleitung. Die an-
gegebenen Werte für Bauelemente sind daher nur zum Rech-
nen bestimmt und sind nicht im Liefersortiment von Typ
38500 enthalten.

Es sind gegenüber der Darstellung im vorliegenden Hand-
buch kleine Abweichungen zu verzeichnen, insbesondere
die Kennzeichnung der Umkehrung der Integrierer durch das
Vorzeichen "-" bei der Angabe der Konstante. Normen sind
hier international noch nicht vorhanden.

Wichtig sind auch die Abhandlungen über Zeittransformation,
die in dem vorliegenden Handbuch an anderer Stelle nicht
gebracht sind.

Die Differentialgleichung und ihre Lösung mit dem Operationsverstärker

1. Allgemeines

Physikalische Vorgänge lassen sich durch Verwendung von Differentialgleichungen allgemein gültig darstellen und lösen. Dabei sind Anfangs- und Endbedingungen, also die Grenzen, bei der Rechnung zu berücksichtigen.

Zum Beispiel: Es ist $R = f(U)$ eines Widerstandes zu messen, dies geschieht aber in den Grenzen von $U = 1 \text{ V}$ bis 5 V .

Das Lösen von Differential-Gleichungen erfolgt mathematisch durch bekannte mehr oder weniger komplizierte Methoden. Durch Umsetzen der Zahlenwerte in Spannungen läßt sich auf elektronische Wege, z.B. mit Hilfe eines Integrationsnetzwerkes, ebenfalls eine Lösung erreichen. Die Lösung der Aufgaben erfolgt im Analog-Rechner oder im Analogteil eines Hybrid-Rechners.

2. Die Integration allgemein

Die mathematisch-elektronische Lösung erfolgt in einer Schaltung nach Bild 1

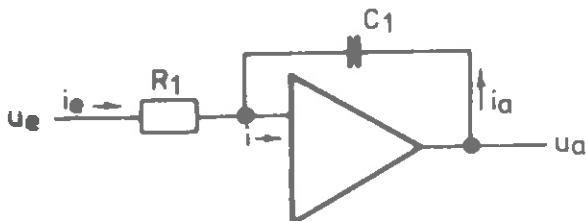


Bild 1: Der Integrator allgemein

$$(a) \quad u_a = \frac{1}{C_1} \int i_a \cdot dt \qquad (b) \quad i_e = i_a = \frac{u_e}{R_1}$$

$i_e = u_a$ weil $i \approx 0$ ist (Eigenschaft eines guten 0.-V.)

Setzt man (b) in (a) ein, so ist:

$$u_a = \frac{1}{C_1} \int \frac{u_e}{R_1} dt \qquad (c)$$

Da R_1 eine konstante oder auch erfaßbare Größe ist, kann R_1 vor das Integrationszeichen gesetzt werden.

$$u_a = \frac{1}{R_1 C_1} \int u_e \cdot dt \qquad (d)$$

Daraus ergibt sich: $\frac{1}{R_1 \cdot C_1}$ ist die Integrationskonstante, wird auch mit k bezeichnet. $R_1 \cdot C_1$ entspricht einer Zeit.

3. Die Realisierung der Integration mit einem Operationsverstärker

Bild 2 zeigt die Schaltung mit O.-V. und Bauteilen.

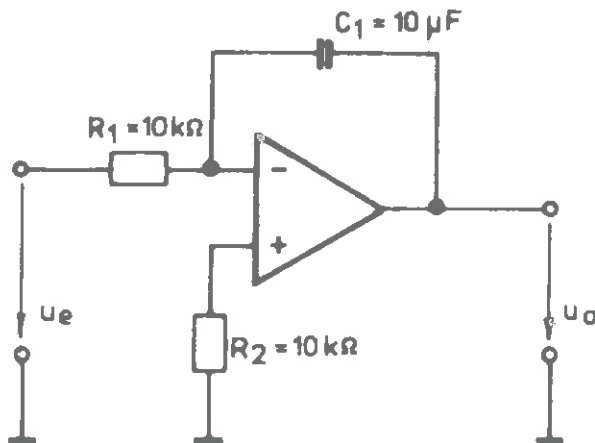


Bild 2: Aufbau eines Umkehrintegrators mit einem Operationsverstärker

Integrationskonstante $k = \frac{1}{R_1 \cdot C_1}$; $R_1 = 10^4 \text{ Ohm}$, $C_1 = 10^{-5} \text{ F}$

$$k = \frac{1}{10^4 \text{ Ohm} \cdot 10^{-5} \text{ F}} = \frac{1}{10^{-1}} \text{ s}^{-1} = 10 \text{ s}^{-1}$$

(Einheitenbeziehung: $\text{Ohm} \cdot \text{F} = \text{s}$)

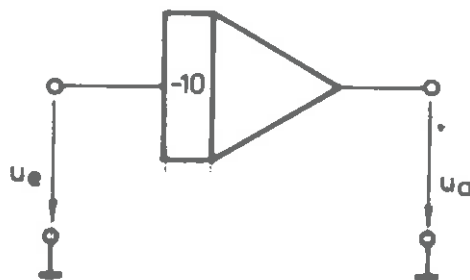


Bild 3: Symbol des Integrators aus Bild 2

Die Integrationskonstante k wird in das Symbol (ohne Einheit) eingetragen; liegt ein Umkehrintegrator vor, dann wird ein Minuszeichen vor dem k geschrieben (Bild 2).

1. Mehrfachintegration mit Operationsverstärkern

Es soll hier anhand einer Doppelintegration der Aufbau und deren mathematische Zerlegung gezeigt werden (Bild 4 und Bild 5).

$$\text{z.B. } U_a = \iint \cdot 5 u_e dt = 5 \cdot \iint u_e dt = 5 \int u_e dt \cdot \int u_e dt$$

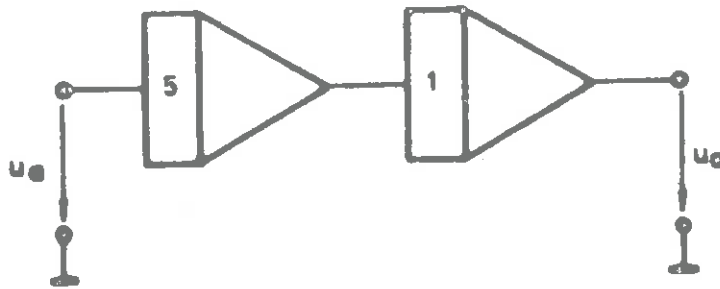


Bild 4: Schematischer Aufbau einer Doppelintegration

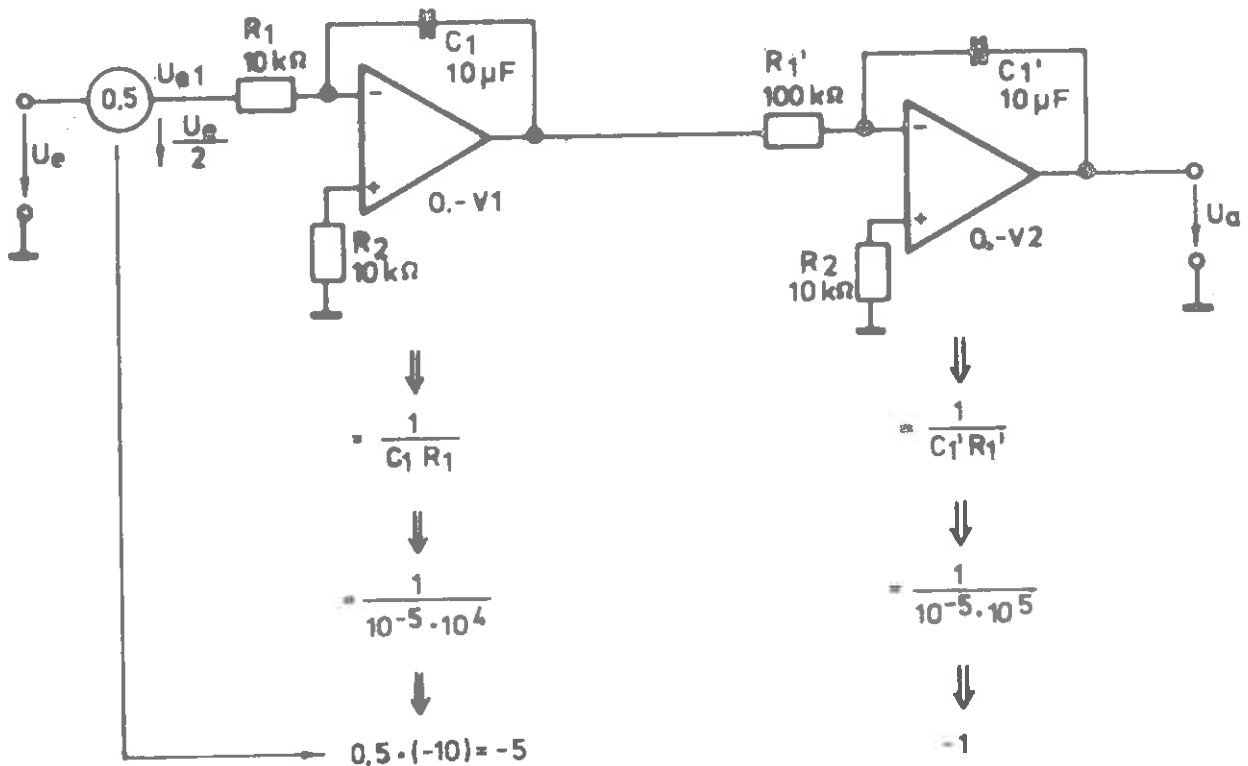


Bild 5: Aufbau einer Doppelintegration

In Bild 4 ist die Zerlegung in zwei Einzelintegrationen gezeigt. In Bild 5 ist die mathematische Gleichung in eine 0.-V. Schaltung umgesetzt. Der Kreis mit dem Wert 0,5 stellt einen Spannungsteiler dar (nach Norm), der u_e auf $u_{e1} = 0,5 u_e$ herabgesetzt. Es werden hierzu meist Mehrgang-Präzisionspotentiometer verwendet. Der nachfolgende 0.-V. muß dann eine Integrationskonstante von $K = -10$ aufweisen. Da jeder der beiden 0.-V. das Signal invertiert, ergibt sich keine Umkehr, $(-1) \cdot (-1) = +1$. Um günstige Rechenwerte zu erhalten, werden für Widerstände $R = 10 \text{ k}\Omega, 100 \text{ k}\Omega, 1 \text{ M}\Omega$ und für Kondensatoren $C = 0,1; 1; 10; 100 \text{ }\mu\text{F}$ verwendet. Zwischenwerte werden durch Potentiometer eingestellt.

5. Einfache Differentiation allgemein

Die Darstellung einer Differentiation mit O.-V. erfolgt nach Bild 6.

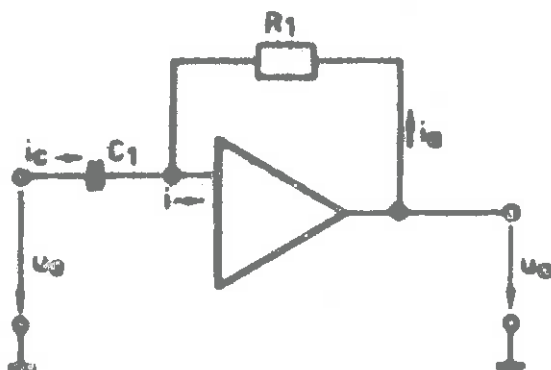


Bild 6: Der Differentiator allgemein

$$i_c = i_a \quad i = 0 \text{ Bedingung}$$

$$i_c = C_1 \frac{d u_e}{dt} \quad (a)$$

$$U_a = i_a \cdot R_1 = i_c \cdot R_1 \quad (b)$$

$$U_a = C_1 \frac{d u_e}{dt} \cdot R_1 \quad (a) \text{ in } (b) \text{ eingesetzt } (c)$$

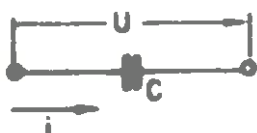
$$U_a = C_1 \cdot R_1 \frac{d u_e}{dt} \quad (d)$$

Durch die Reihenschaltung des Kondensators C_1 mit dem Eingang ist die Schaltung sehr stör anfällig für hohe Frequenzen. Die Lösung einer Differentialgleichung erfolgt daher meist mit Hilfe einer Integrationsschaltung.

6. Schaltung zum Lösen von Differentialgleichung mit Operationsverstärkern

Wie bereits festgestellt, eignet sich die Differentiatorschaltung nicht zur Lösung von Differentialgleichungen.

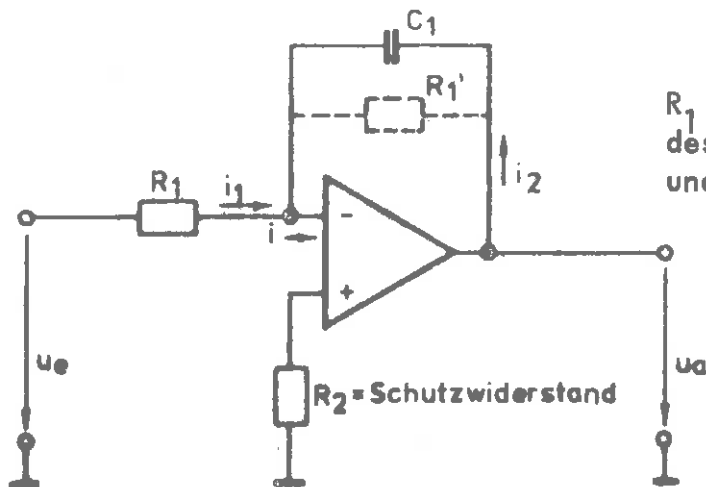
Es soll hier gezeigt werden, daß auch der Integrator Verwendung finden kann.



a) $i = c \frac{du}{dt}$ Die Differentialgleichung

b) $u = \frac{1}{c} \int i dt$ Das Integral

Bild 7 zeigt das Verhalten von Strom und Spannung am Kondensator a) die Differentialgleichung und b) das Integral



R_1' soll den Verlustwiderstand des Kondensators darstellen und unerwünschte Aufladen verhindern.

Bild 8: Schaltung eines Integrators. Es soll zum Lösen der Differentialgleichung verwendet werden.

$$u_e = \frac{1}{C_1 R_1} \int u_a \, dt \quad (a)$$

$$u_e = \frac{1}{C_1} \int \frac{u_a}{R_1} \, dt \quad (b)$$

$$u_e = \frac{1}{C_1} \int i \, dt \quad \text{Integral} \quad (c)$$

$$i = C_1 \frac{d u_a}{dt} \quad \text{Differentialgleichung erster Ordnung} \quad (d)$$

$$i = i_1 - i_2 \quad i_1 \neq i_2 \text{ weil der Kondensator } C_1 \text{ erst aufgeladen werden muß.}$$

$$i_1 = \frac{u_e}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{u_a}{R_1}$$

i_1 , i_2 und i in $i = i_1 - i_2$ eingesetzt.

$$C_1 \frac{d u_a}{dt} = \frac{u_e}{R_1} - \frac{u_a}{R_1} \quad (e)$$

$$\boxed{\frac{d u_a}{dt} = \frac{u_e}{R_1 C_1} - \frac{u_a}{R_1 C_1}} \quad (f)$$

Diese Formel entspricht der Schaltung des Operationsverstärkers entsprechend der Differentialgleichung.

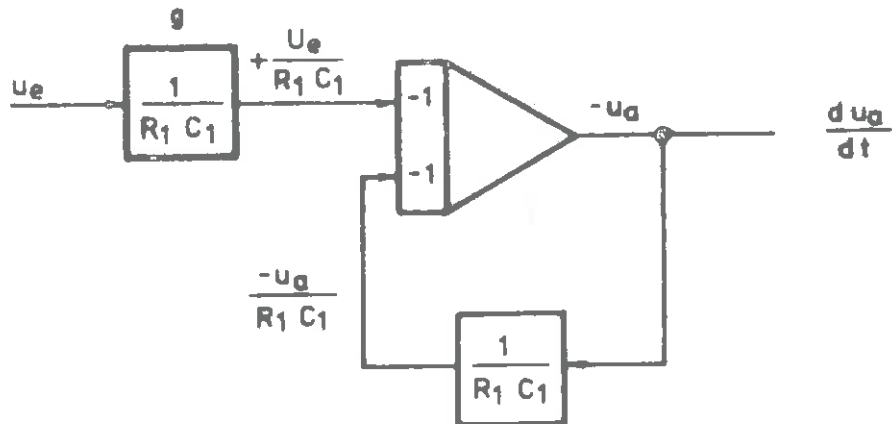


Bild 9: Blockschaltung der Differentialgleichung

$$\frac{d u_a}{dt} = \frac{u_e}{\tau} - \frac{u_a}{\tau} \quad (\tau = R_1 \cdot C_1)$$

Die Blöcke $\frac{1}{R_1 \cdot C_1}$ werden dann einfach mit Potentiometern nachgebildet,

d.h. der Wert $\frac{1}{R_1 \cdot C_1}$ als Widerstand eingestellt.

Dies geschieht, um genaue Einstellungen zu bekommen, mit einem Mehrgangpotentiometer.

7. Anwendung der Differentialgleichung zur Nachbildung

Beispiel:

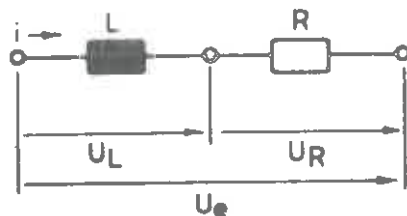


Bild 10: RL-Glied

$$u_e = u_L + u_R \quad (a)$$

$$u_e = L \frac{di}{dt} + i R \quad (b)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_e}{L} - \frac{i R}{L} \quad (c)$$

$L = \text{Ohm} \cdot \text{s}$ als Dimension

$$\frac{u_e}{L} - \frac{i \cdot R}{L}$$

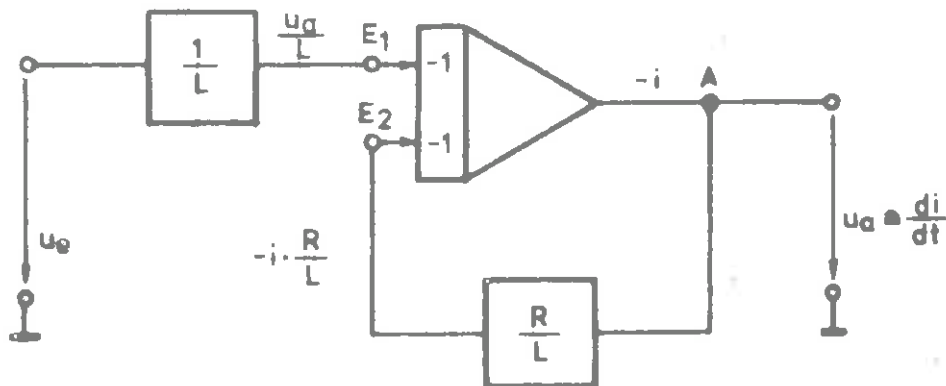


Bild 11: Blockschaltung für die Darstellung der mathematischen Beziehungen eines RL-Gliedes

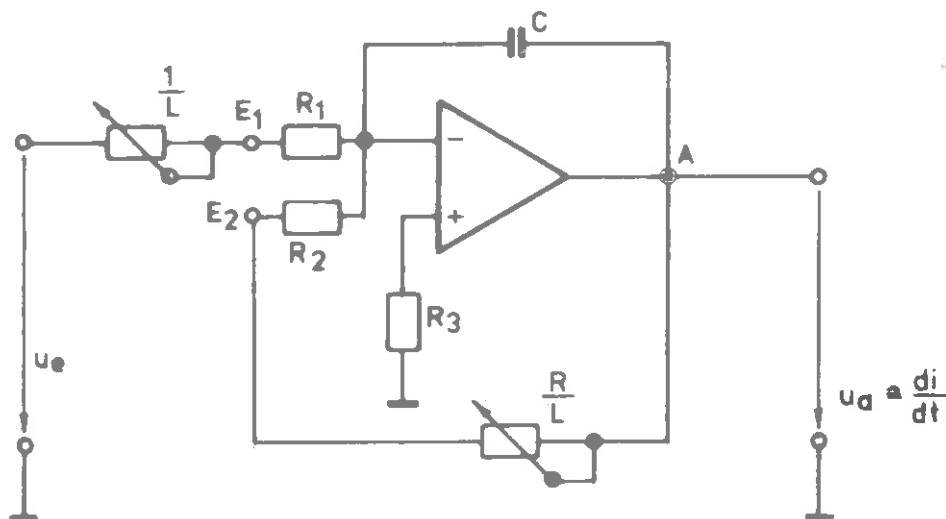


Bild 12: Aufbau der Schaltung zur Lösung der Differentialgleichung eines RL-Gliedes

8. Zeittransformation

$\frac{d u_a}{dt}$ wird auch mathematisch mit \dot{u}_a bezeichnet; ebenso

$$\frac{di}{dt} = \dot{i} = \dot{i}$$

$$\dot{u}_a = \frac{u_e}{CR} - \frac{u_a}{CR}$$

$$\dot{u}_a = \frac{u_e}{\tau} - \frac{u_a}{T}$$

Benötigte Rechenzeit $\tau = 7$ s für eine angenommene Aufgabe. Sollte die Schreibbreite wegen des einstellbaren Zeitmaßstabes des X-Y-Schreibers oder des Oszillografen für eine gewünschte Registrierdauer nicht ausreichen, dann ist eine Zeittransformation erforderlich. Dies geschieht direkt in der Differentialgleichung.

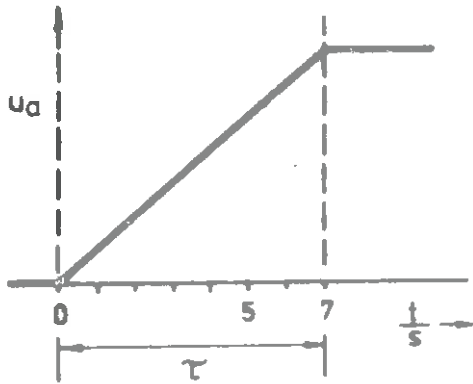


Bild 13: Darstellung ohne Zeittransformator

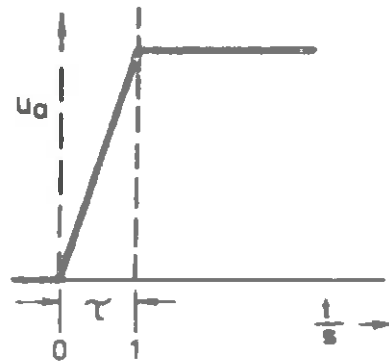


Bild 14: Darstellung mit Zeittransformator (Änderung des Zeitmaßstabes)

Die Zeit $\tau = 7$ s soll auf $\tau' = 1$ s reduziert werden, d.h. die Integration muß anstatt in 7 s in 1 s ablaufen. Die Zeitersparnis ist 1 : 7, daraus ergibt sich der Zeittransformationsfaktor

$$\lambda = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{7}$$

$$\tau' = \lambda \tau$$

Die Gleichung lautet dann:

$$\dot{u}_a = \frac{u_e}{\lambda \tau} - \frac{u_a}{\lambda \tau}$$

$$\dot{u}_a = \frac{u_e}{\tau'} - \frac{u_a}{\tau'}$$

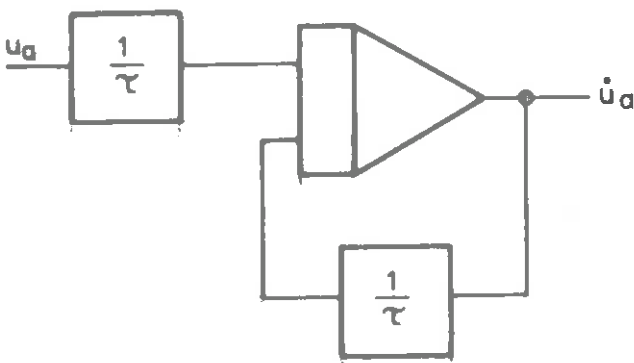


Bild 15a: Schaltung ohne Zeittransformation z.B. $\tau = 7$ s

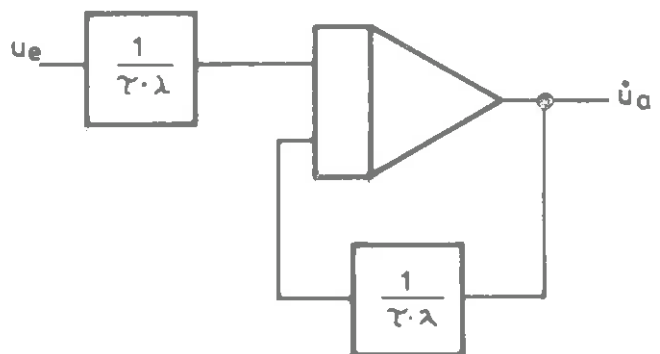


Bild 15b: Schaltung mit Zeittransformation z.B. $\tau' = 1$ s

Grundlagen einfacher Regeleinrichtungen

1. Allgemeines

Die Art des Reglers ist bei einfachen Regelungen durch die Sprungantwort zu erkennen, das heißt, durch das Ergebnis am Ausgang, bezogen auf eine sprunghafte Änderung des Eingangs.

Die Regelungstechnik benutzt auch pneumatische, hydraulische und elektromechanische Regler. Die Elektronik ist als neues Gebiet hinzugekommen.

2. Proportional Regler (P-Regler)

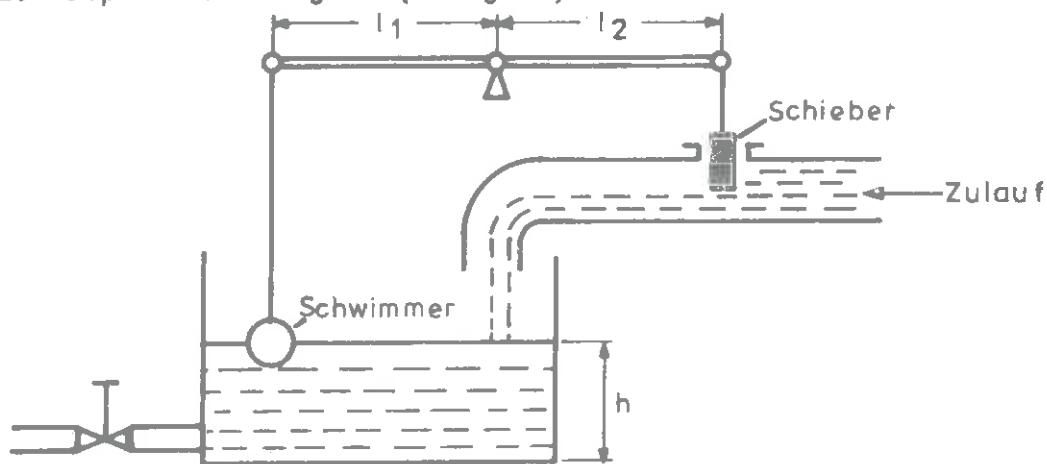
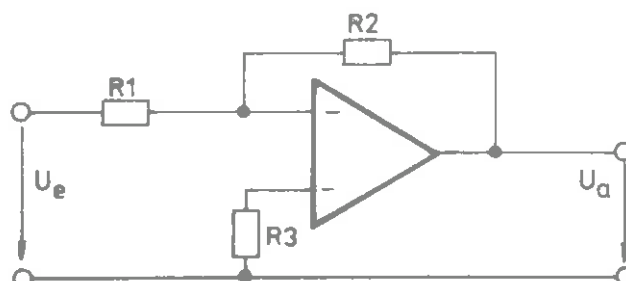


Bild 1: Einfache Flüssigkeitsstandsregelung

Ist der Behälter ganz leer, dann ist der Schwimmer ganz unten. Das bedeutet aber, der Zulauf ist ganz offen (Bild 1). Steigt nun der Wasserspiegel im Behälter an, dann wird durch den Schieber (Stellglied) weniger Wasser fließen. Bei h ist der Schieber ganz geschlossen. Durch unterschiedliche Länge der Hebelarme $l_1:l_2$, läßt sich das Verhältnis Wasserhöhe zur Schieberstellung verändern. Am Regler stellt der Wasserstand h die Eingangsgröße dar, die Schieberstellung ist die Ausgangsgröße.

$$\frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}} = \text{Verstärkung } v \quad v = \frac{l_1}{l_2}$$

Der lineare Operationsverstärker hat die P-Regler Charakteristik, Bild 2.



$$v = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2}{R_1}$$

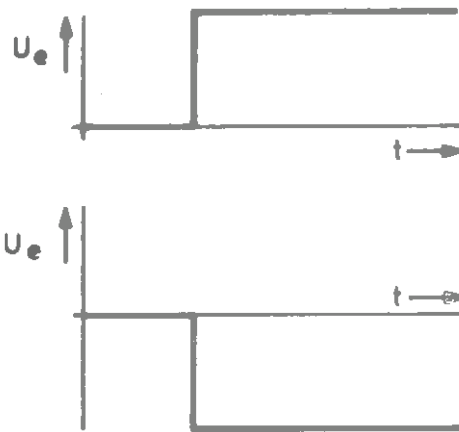


Bild 3: Die Sprungantwort (U_a) eines P-Reglers

Merke: P-Regler bewirken eine zur Regeldifferenz proportionale Verstellung der Stellgröße. Es tritt beim P-Regler durch die starre Kopplung eine bleibende Regeldifferenz auf.

Die Übergangsfunktion heißt beim P-Regler

$F = v$ (Übergangsfunktion ist die Funktion des Reglers)

$$U_a = F \cdot U_e = v \cdot U_e$$

3. Integrierender Regler (I - Regler)

Um die meist unerwünschte Regeldifferenz am Ausgang zu vermindern, wird der sog. I-Regler eingesetzt. Durch Einsatz des Integrators in den Regler wird die Ausgangsgröße zeitlich unabhängig verändert. Durch Vorintegration oder nicht vollständige Entladung des Kondensators lassen sich Anfangsbedingungen mit eingeben.

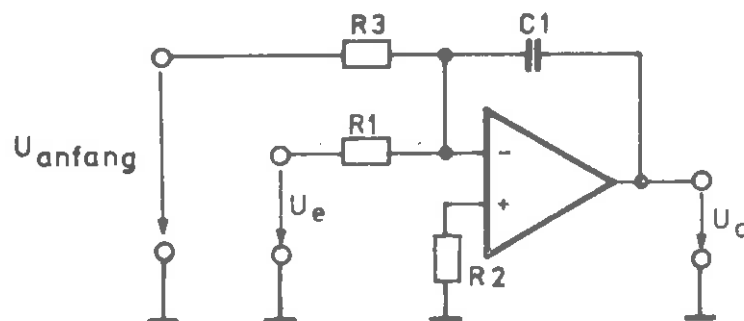


Bild 4: I-Regler mit Anfangsbedingung U_{anfang}

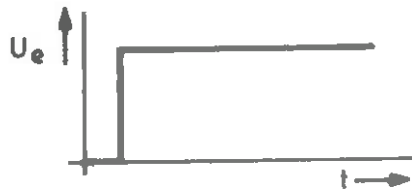


Bild 5a: Test mit Sprung

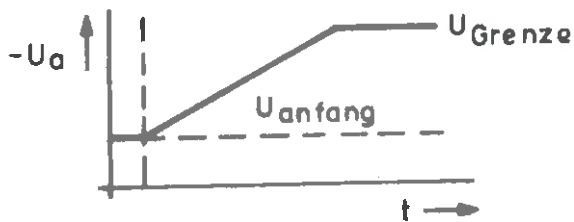


Bild 5b: Ausgangsspannung

Merke: Der I-Regler hat linearen Anstieg über der Zeit. I-Regler haben eine "lange" Regelzeit, dafür keine Regeldifferenz am Ende des Regelvorganges.

Reine I-Regler sind sehr selten, meist ist noch ein proportionaler Teil vorhanden. Dieser kommt durch den Innenwiderstand des O.-V. und den ohmschen Anteil des Kondensators zustande.

$$\text{Übergangsfunktion } F = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{R_1 C_1 p} \quad P=$$

4. Proportional-Integral-Regler (P-I-Regler)

Der P-I-Regler hat erst den Proportional sprung und regelt dann integrierend weiter. Es können hier auch wieder Anfangsgrößen eingegeben werden.

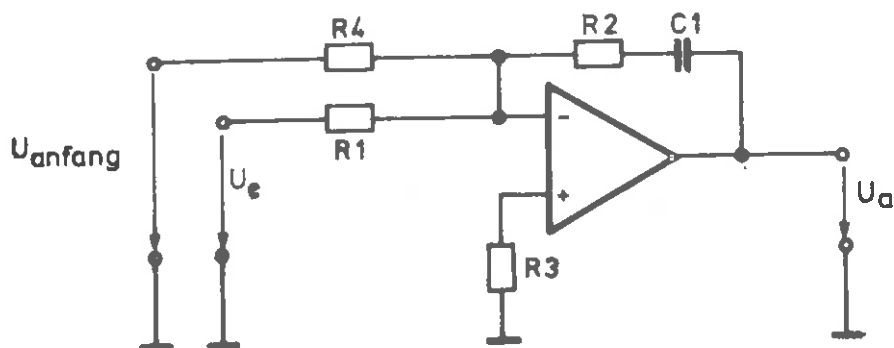


Bild 6: PI-Regler mit Anfangsbedingung U_{anfang}

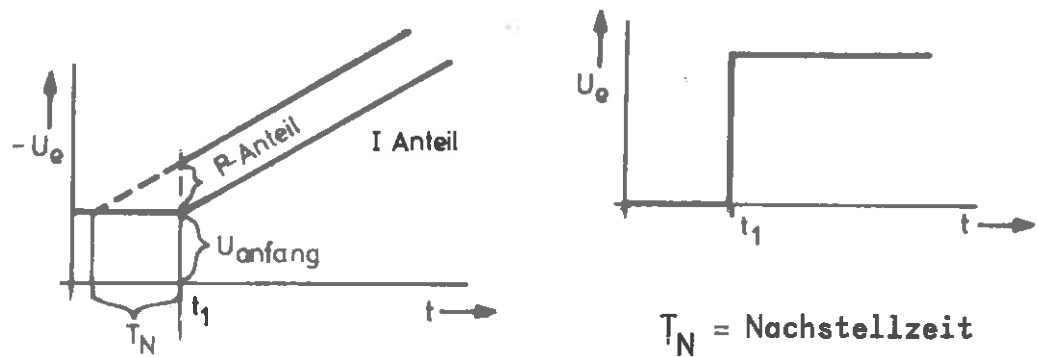


Bild 7: Sprungantwort eines PI-Reglers

Merke: Die Größe der Ausgangsspannung U_o ändert sich erst sprunghaft, danach setzt die zeitliche Änderung von U_o ein, d.h. der I-Anteil wird wirksam. Die Regeldifferenz wird schneller ausgeglichen, als beim reinen I-Regler. T_N ist die Nachstellzeit des Reglers.

Die Übergangsfunktion lautet:

$$F = v \cdot \frac{1 + T_N p}{T_N p}$$

$$F = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1 + R_1 \cdot C_1 p}{R_1 \cdot C_1 p}$$

Anwendung findet der PI-Regler in der Temperaturregelung, damit ein langsamer Anstieg der Temperatur den Sollwert nicht überschreitet. Beim P-Regler würde ein Überschreiten leicht möglich sein.

5. Differenzierender Regler (D-Regler)

Der D-Regler hat als Sprungantwort eine unendlich hohe Änderungsgeschwindigkeit, die dann nach sehr kurzer Zeit wieder auf Null zurückkehrt. Daher ist es zweckmäßig D-Regler mit einer Rampe (Sägezahn) zu untersuchen. Es entsteht als Sprungantwort eine Nadelfunktion.

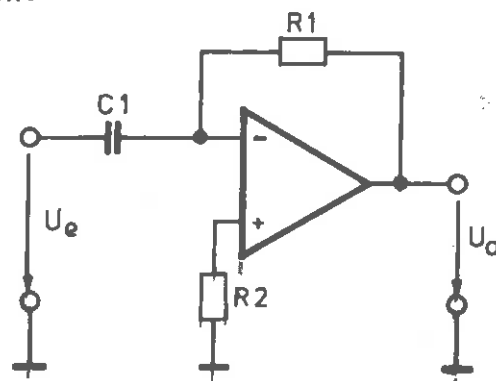


Bild 8: D-Regler

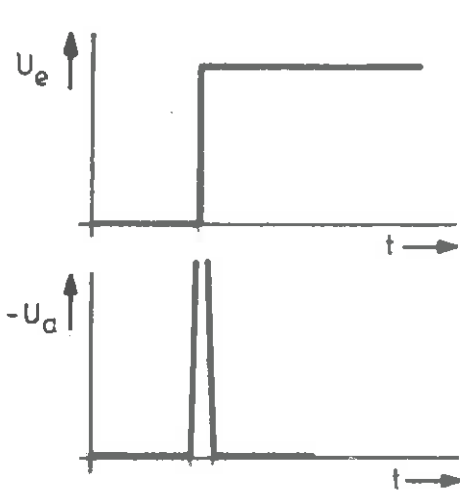


Bild 9: Sprungantwort eines D-Reglers

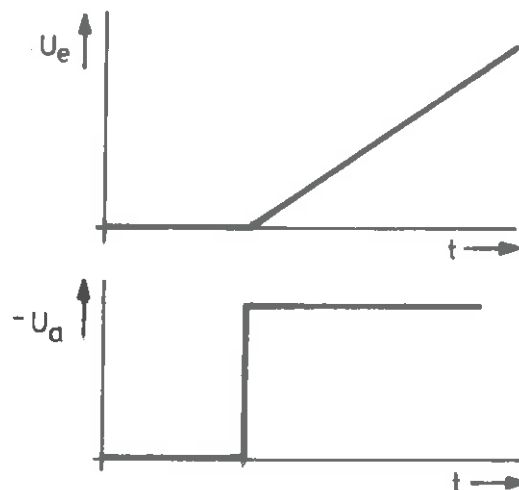


Bild 10: Aufstiegsantwort eines D-Reglers

Die Übergangsfunktion lautet:

$$F = T \cdot p$$

$$F = R_1 \cdot C_1 \cdot p$$

6. Proportional-Differenzial-Regler (PD-Regler)

PD ist die Kombination P- und D-Regler; es müssen nicht immer die markanten Eigenschaften bei der Schaltung sichtbar sein. Dieser Regler wird auch günstiger Weise mit der Rampe untersucht.

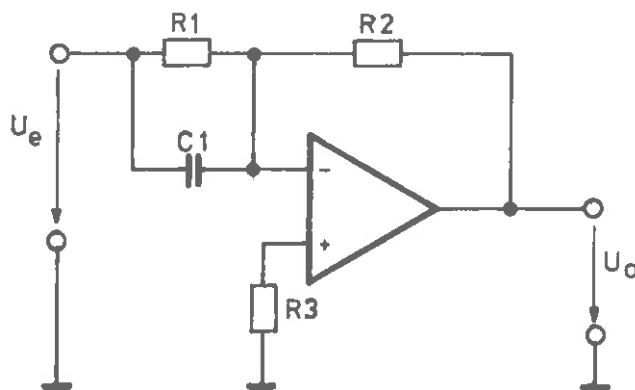


Bild 11: P-D-Regler

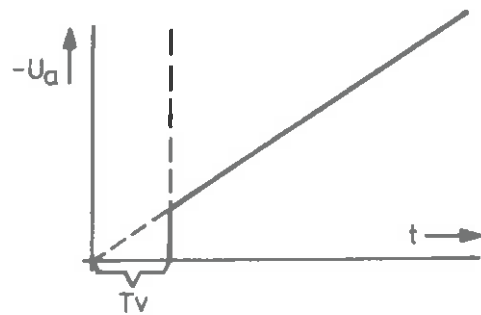
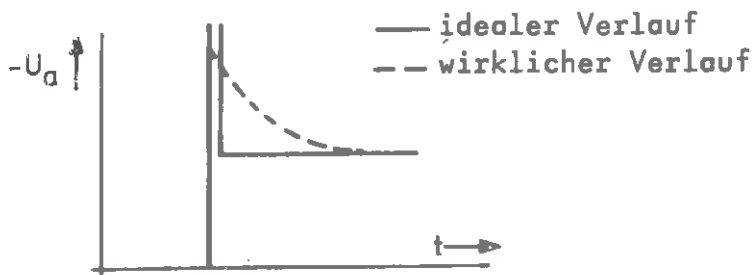
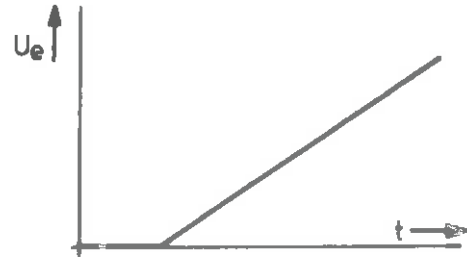
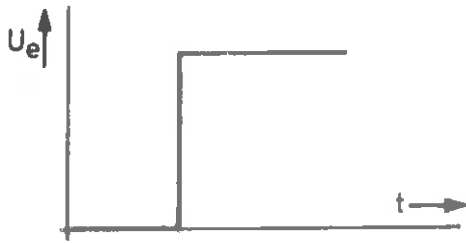


Bild 12: Sprungantwort eines P-D-Reglers

Bild 13: Anstiegsantwort eines P-D-Reglers

Merke: Der P-D-Regler regelt schneller als der P-Regler, hat aber eine bleibende Regeldifferenz zur Folge.

Die Übergangsfunktion lautet:

$$F = v (1 + T_{yp})$$

$$F = \frac{R_2}{R_1} (1 + R_2 \cdot C_1 p)$$

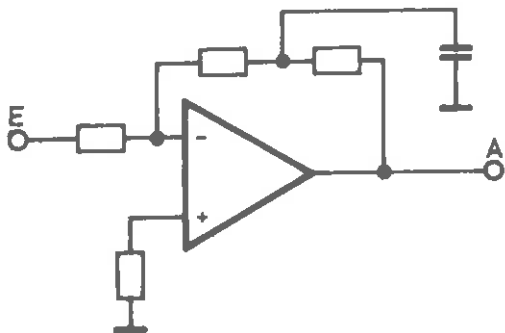


Bild 14: Andere Schaltung eines PD-Reglers, mit verbessertem Frequenzgang

7. Der Proportional-Integral-Differential-Regler (PID-Regler)

Die Sprunganwort eines PID-Reglers setzt sich aus allen 3 Anteilen zusammen. Er hat fast alle Nachteile der anderen Regler durch diese Kombination beseitigt.

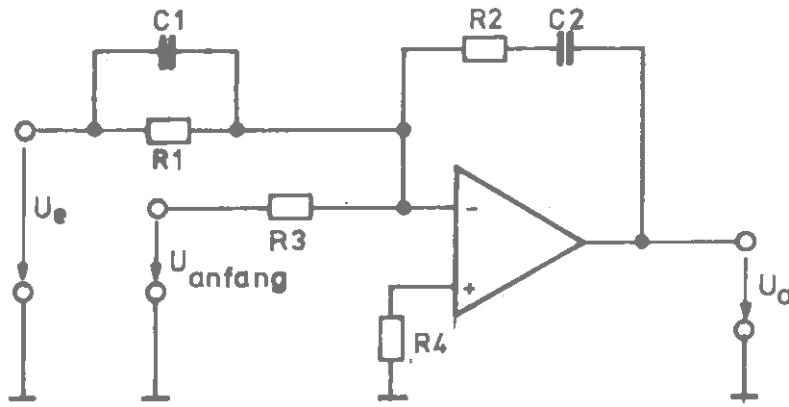


Bild 15: PID-Regler

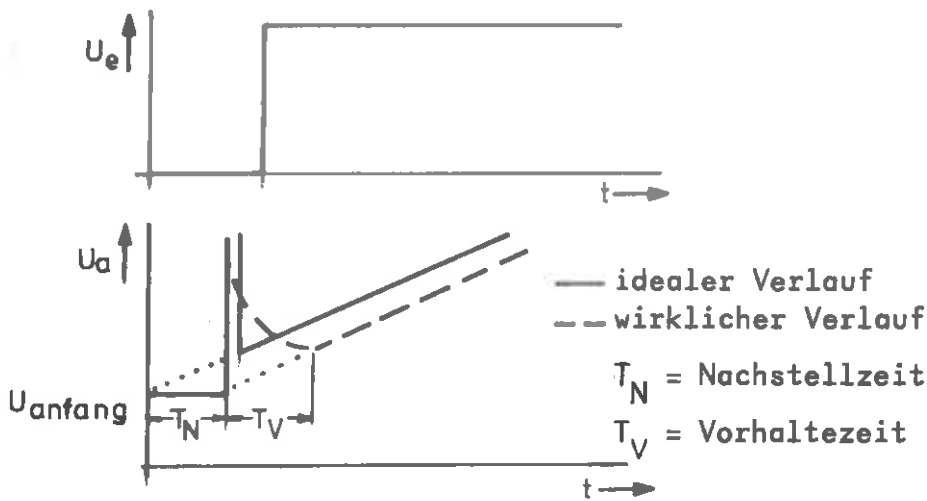


Bild 16: Sprungantwort eines PID-Reglers

Die Übergangsfunktion lautet:

$$F = v \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_N p}$$

$$F = \frac{R_2}{R_1} \frac{(1 + R_1 C_2 p) \cdot (1 + C_1 R_2 p)}{R_1 \cdot C_2 p}$$

Merke: Der PID-Regler regelt eine Regeldifferenz schnell und ohne bleibende Regeldifferenz aus.

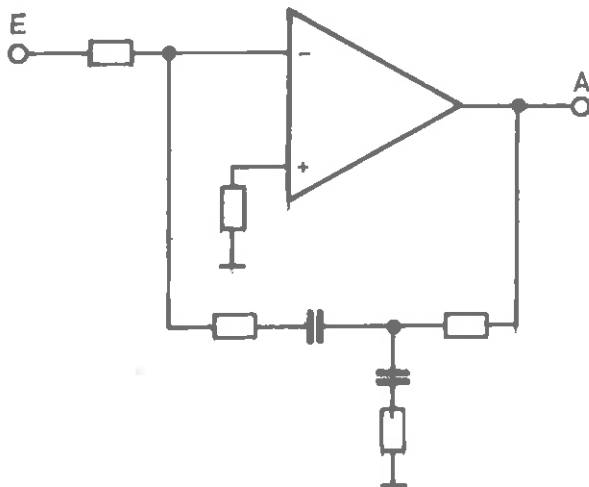


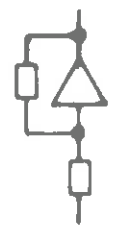

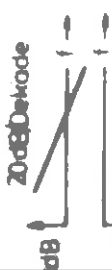












Bild 17: Schaltungsmöglichkeit eines PID-Reglers, mit verbessertem Frequenzgang

Zusammenstellung der Regler und ihre Eigenschaften

Bezeichnung	Übergangsfkt.	Sprungantwort	Frequenzgang Phasen Winkel	Schaltung	Beschreibung
P-Regler	$F = V$				Der P-Regler bewirkt eine unverzögerte proportionale Änderung der Stellgröße mit einer bleibenden Regeldifferenz.
I-Regler	$F = \frac{1}{T_p}$				Der I-Regler bewirkt, daß die Stellgröße um so mehr ansteigt oder abfällt, je länger die Regeldifferenz besteht. Die Änderung hört erst dann auf, wenn die Regeldifferenz Null ist. Der I-Regler hat daher keine bleibende Regeldifferenz. Die Stellgröße ist also gleich dem Integral der Regeldifferenz über die Zeit.
PI-Regler	$F = V \left(\frac{1+T_{NP}}{T_{NP}} \right)$ $T_N = \text{Nachstellzeit}$				Der PI-Regler bewirkt eine sprunghafte Änderung der Stellgröße. Ab einem bestimmten U-Wert tritt der I-Anteil (über Zeit) in Aktion. Der PI-Regler hat keine bleibende Regeldifferenz.
PD-Regler	$F = V (1+T_{vp})$ $T_v = \text{Vorhaltezeit}$				Tritt eine Regeldifferenz auf, so erfolgt zunächst kurzzeitig eine große Stellgrößenänderung (D-Glied), die dann auf den proportionalen Wert zurückgeht (P-Glied). PD-Regler hat eine bleibende Regeldifferenz.
PID-Regler	$F = V \frac{(1+T_{1p})}{T_{NP}} (1-T_{2p})$				Tritt eine Regeldifferenz auf, so erfolgt zunächst eine große Stellgrößenänderung (D-Glied), die dann auf den proportionalen Wert zurückgeht (P-Glied) und schließlich mit der Zeit zunimmt (I-Glied). Der PID-Regler hat keine bleibende Regeldifferenz.