

Die durch stufenweise Beschleunigung erreichbare Gesamtspannung liegt in der Größenordnung von 100 kV. Die Ablenkplatten sind vor der Hauptabbildungsoptik direkt auf der Blende angebracht; die Ablenkung erfolgt also vor der elektronenoptischen Hauptlinse. Der Leuchtschirmdurchmesser beträgt 250 mm. Bei niedrigen Spannungen an der Blende erreicht die Ablenkempfindlichkeit den hohen Wert von 1 mm/V (bei 45 kV Gesamtspannung). Aus aufgenommenen Oszillogrammen wird die Schreibgeschwindigkeit berechnet und gezeigt, daß die maximale photographisch registrierbare Schreibgeschwindigkeit in der Größenordnung von 1000 km/s liegt. Dieser bisher von Braunschen Oszillographenröhren nicht erreichte Wert läßt das angewendete Prinzip auch als für Einstrahlröhren zweckmäßig erscheinen.

Die Untersuchungen wurden in der Zeit von November 1935 bis März 1937 im Laboratorium für Vakuumröhrentechnik der T. H. Berlin durchgeführt. Für die stetige Förderung bin ich dem Leiter des Laboratoriums, Herrn Dr.-Ing. M. Knoll, zu Dank verpflichtet. Ebenfalls danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Ermöglichung der Versuche.

## Anwendung der Braunschen Röhre für die Auflösung von Differentialgleichungen auf elektrischem Wege.

Von

Hans Kleinwächter, Reichenberg/Sudetenland.

(Bericht aus dem Gewerbeförderungsinstitut in Reichenberg.)

(Eingegangen am 2. 7. 1938.)

DK 621. 385. 832 : 518. 5

**Übersicht.** Es wird versucht, die Eigenschaften einer Selbstinduktionsspule, bei der die angelegte Spannung der Differentialquotient des Stromes nach der Zeit ist, zur Auflösung von Differentialgleichungen zu benutzen. Zu jeder Differentialgleichung gehört eine bestimmte Schaltung. Änderungen der Größe der einzelnen Schaltungselemente entsprechen Änderungen der Parameter der zugehörigen Differentialgleichung.

Eine große Anzahl äußerst einfach aufgebauter Differentialgleichungen hat keine elementaren Funktionen als Lösungen. Man muß daher entweder zu einem rechnerischen Näherungs- oder einem graphischen Verfahren greifen. Ersteres bereitet einestheils oft Konvergenzschwierigkeiten, andernteils hängt der Weg, den man zur Auflösung einschlägt, von der Größe der Parameter der Differentialgleichung ab. Das graphische Verfahren beschränkt sich auf Differentialgleichungen erster bzw. zweiter Ordnung unter Zuhilfenahme der Krümmungskreise. In beiden Fällen bekommen wir eine Einzellösung, die von den jeweiligen Anfangsbedingungen abhängt.

Es sei daher hier ein Verfahren geschildert, welches es gestattet, durch einfache Verstellung einer Apparatur die Lösung bestimmter Differentialgleichungen für beliebige Anfangsbedingungen und auch Parameter augenblicklich auf dem Leuchtschirm einer Braunschen Röhre erscheinen zu lassen.

Dieses Verfahren besteht in der Anwendung einer elektrischen Schaltung, deren Einzelteile in jedem Augenblick elektrisch so zusammenwirken, wie es der durch die gegebene Differentialgleichung bedingte Zusammenhang der abhängigen Veränderlichen mit der zweiten, unabhängigen (der Zeit) und den Differentialquotienten

fordert. Der kennzeichnende Bestandteil dieser Vorrichtung ist eine besonders gebaute Braunsche Röhre *I* mit eindimensionaler Ablenkung und einem Widerstandstabe, der den senkrecht zu ihm gerichteten Elektronenstrahl auffängt. Ein Ende dieses Stabes ist über eine Vorspannung geerdet, so daß sich das andere Ende, dank der kleinen Kapazität, die der Stab besitzt, augenblicklich auf ein Potential  $v_1$  auflädt, welches dem Ohmschen Spannungsabfall und somit der Größe  $y$  entspricht.  $y$  stellt die gesuchte, von der Zeit abhängige Veränderliche dar (Bild I).

Um auch die Größen  $y'$ ,  $y''$  usw. elektrisch darzustellen, läßt man das  $v_1$  auf das Gitter einer im geradlinigen Teil der Kennlinie arbeitenden Schirmgitterröhre *II* wirken, in deren Anodenkreis sich eine Selbstinduktion  $L$  befindet. Die sich an  $L$  ausbildende Selbstinduktionsspannung  $v_2$  ist der zeitlichen Ableitung des Anodenstromes und somit  $y'$  proportional. Für die Darstellung höherer Differentialquotienten läßt man  $v_2$  wiederum auf das Gitter einer weiteren Röhre wirken usw.

Für die Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Form:

$$y' + a y = b$$

ergibt sich das Schaltschema Bild I. Die Spannungen  $v_1$  und  $v_2$  werden an die Ablenkplatten der Hauptröhre *I* gelegt. Dadurch ist die augenblickliche Größe  $y$  mit dem Werte von  $y'$  nach folgender Rechnung verknüpft:

- $v_1$  Spannung am Ende des Widerstandstabes,
- $y$  Ausschlag des Elektronenstrahls aus der Nullage,
- $y_0$  Länge des Stabes bis zum Nullpunkt,
- $i$  Strahlstrom,
- $\rho$  Widerstand des Stabes je Zentimeter,
- $v_{10}$  Vorspannung des Stabes,
- $i_a$  Anodenstrom der Röhre *II*,
- $S$  Steilheit der Röhre *II*,
- $i_{a0}$  Anodenstrom bei Gitterspannung 0,
- $v_2$  Spannung an der Selbstinduktion  $L$ ,
- $A$  Ausschlag des Elektronenstrahls bei 1 V Ablenkspannung,
- $v_{20}$  Vorspannung der Selbstinduktionsspule  $L$ .

$$v_1 = v_{10} - (y + y_0) \rho i, \quad i_a = S v_1 + i_{a0}$$

$$v_2 = -L \frac{di_a}{dt} - v_{20} = v_{20} - L S \rho i y',$$

$$\underline{(\pm) y = A(v_1 + v_2)} = -y A \rho i + A(v_{10} - y_0 \rho i) - A L S \rho i y' + A v_{20},$$

$$y' + y \frac{1 - A \rho i}{A L S \rho i} = \frac{y_0 \rho i - v_{10} - v_{20}}{L S \rho i}$$

$$y' + y a = b \dots y = \frac{b}{a} + \alpha e^{-t/a}.$$

Die Größe der Parameter  $a$  und  $b$  bestimmt sich nach obenstehender Rechnung aus den elektrischen Daten der Geräte; die Parameter lassen sich somit verändern. Die Anfangsbedingung ist durch den ursprünglich vorhandenen Ausschlag  $y_0$  des Kathodenstrahls bedingt, der durch eine Hilfsspannung erzeugt wird, die man im Augenblicke  $t = 0$  abschaltet.

Daß dieser Ausschlag  $y_0$  dem Anfangswert der darauffolgenden stetigen Strahlbewegung gleicht, sieht man daraus, daß die Änderung von  $y$  im ersten Zeitelement nicht endlich sein darf, da dies einem unendlich großen  $y'$  und somit einem unendlich großen  $v_2$  entsprechen müßte.

Für Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung ergibt sich nach derselben Überlegung die Anfangsbedingung:

$$y = y_0, \quad y'_0 = 0, \quad y''_0 = 0, \dots y_0^{(n-1)} = 0.$$

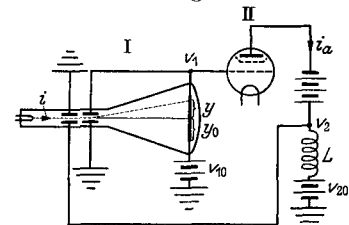


Bild I. Schaltungsschema für die Differentialgleichung  $a y' + b y = c$ .

Um Differentialgleichungen zu lösen, in denen das Produkt zweier Veränderlicher vorkommt, braucht man ein Gerät, welches diese Multiplikation ausführt. Die obengeschilderte Braunsche Röhre erweist sich als geeignet, wenn man die eine der Veränderlichen ( $t, y, y', y'', \dots y^{(n)}$ ) an den Wehnelt-Zylinder und die andere an das Ablenssystem legt. Die Spannung am Ende des Auffangstabes  $iR$  ist dann dem Produkte aus den beiden Steuerspannungen proportional (Bild 2). Durch Wiederholung dieser Schaltung kann man auch höhere Potenzen erzielen.

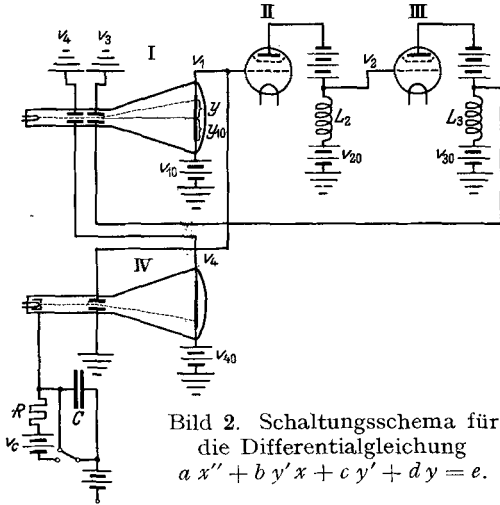


Bild 2. Schaltungsschema für die Differentialgleichung  $a x'' + b y' x + c y' + d y = e$ .

Beispiel:

$$a y'' + b y t + c y + d t + e = 0 \dots \text{(Bild 2)}.$$

$$y = A_1 (v_4 + v_3)$$

$$v_1 = i_1 \varrho_1 (y + y_0) + v_{10}$$

$$v_2 = S_2 L_3 i_1 \varrho_1 y' + v_{20}$$

$$v_3 = S_2 S_3 L_2 L_3 i_1 \varrho_1 y'' + v_{30}$$

$$v_4 = A_4 v_1 \varrho_4 i_4 + y_{40} \varrho_4 i_4 + v_4$$

$$i_4 = i_{40} + S_{40} \frac{v_c}{C} \cdot t.$$

$$a = A_1 S_2 S_3 L_2 L_3 i_1 \varrho_1,$$

$$b = A_1 A_4 \varrho_4 i_1 \varrho_1 S_4 \frac{v_c}{RC},$$

$$c = A_1 A_4 \varrho_1 \varrho_4 i_1 i_{40} - 1,$$

$$d = A_1 \left[ A_4 \varrho_4 S_4 \frac{v_c}{RC} (v_{10} + i_1 \varrho_1 y_0) + y_{40} \varrho_4 S_4 \frac{v_c}{RC} \right],$$

$$e = A_1 [A_4 \varrho_4 (i_1 \varrho_1 y_0 i_{40} + v_{10} i_{40}) + v_{40} + v_{30} + y_{40} \varrho_4 i_{40}].$$

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich auch Differentialgleichungen mit Gliedern von der Form  $\frac{\varphi(t, y, y' \dots)}{\sqrt{\psi(t, y, y' \dots y^{(n)})}}$  bzw.  $\frac{\varphi(t, y, y' \dots y^{(n)})}{\psi(t, y, y' \dots y^{(n)})^{n/2}}$  darstellen lassen, indem man die Anodenspannung der entsprechenden Braunschen Röhre proportional  $\psi(t, y, y', \dots y^{(n)})$  macht, da der Ausschlag des Kathodenstrahls der Wurzel aus der Anodenspannung umgekehrt proportional ist.

In allen Fällen ist der Hauptröhre I noch eine Abbildungsröhre parallel geschaltet, welche die Steuerspannungen von I übernimmt; auf ihrem Leuchtschirm zeigt die Abbildungsröhre die Lösung  $y$  in Funktion der Zeit.

### Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die Methode es möglich macht, Einzellösungen von Differentialgleichungen höherer Ordnung und auch Grades auf dem Schirm einer Braunschen Röhre erscheinen zu lassen. Es wurden dabei nur rein elektrische Apparate angewendet, was eine selbstauferlegte Einschränkung bedeutet. Als Beispiele werden die Schaltungsschemen für die Differentialgleichung  $a y' + b y = c$  und  $a y'' + b y' x + c y' + d y = e$  gezeigt, und Wege für kompliziertere Fälle angedeutet.